

Міністерство освіти й науки України  
ОДЕСЬКА НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ ХАРЧОВИХ ТЕХНОЛОГІЙ

**М.І Субботіна, Р.В. Амбарцумянц**

**ПРИКЛАДНА МЕХАНІКА**

**частина 1**

**навчальний посібник**

Затверджено методичною радою  
спеціальності 133 «Галузеве  
машинобудування» галузі знань  
13 «Механічна інженерія»  
протокол № 5 від 15.03.2018 р.

ББК К4  
С 89  
УДК 621(075)

**Субботіна Марина Іванівна, Амбарцумянц Роберт Вачаганович.**  
Прикладна механіка, частина 1: навч. посібник / М.І. Субботіна,  
Р.В. Амбарцумянц. – Одеса: ОНАХТ, 2018. – 96 с.: з іл.

У навчальному посібнику викладений основний матеріал двох теоретичних складових курсу «Прикладної механіки»: теорії механізмів і машин та опору матеріалів. Розглянуті питання: структура механізмів; основні види та характеристики виконавчих механізмів машин: важільних, кулачкових, зубчастих; основи кінематичного і динамічного аналізу механізмів у загальному машинобудуванні. Наведені основні гіпотези опору матеріалів, механічні характеристики міцності матеріалів; викладені інженерні методи розрахунку простіших елементів конструкцій на міцність, жорсткість та стійкість.

Навчальний посібник призначений для студентів, які навчаються за спеціальностями галузі знань 14 «Електрична інженерія», а також буде корисним студентам інженерних спеціальностей при вивченні дисципліни «Прикладна механіка».

Рецензенти:

**В. Ф. Оробей** – доктор технічних наук, професор,  
зав. кафедрою динаміки, міцності машин та опору матеріалів  
Одеського національного політехнічного університету;  
**О. К. Гладушняк** – доктор технічних наук, професор,  
професор кафедри процесів, обладнання та енергетичного менеджменту  
Одеської національної академії харчових технологій;  
**С. К. Камінський** – начальник цеху №5 «Механічна ділянка»  
Одеського кабельного заводу ПАТ ОДЕСКАБЕЛЬ



## ВСТУП

Найбільш важливим засобом, який забезпечує технологічні процеси є машини. У сучасній діяльності людини нема такої галузі, де б вони не використовувалися в широких масштабах. Види машин змінюються у зв'язку з їх призначенням і розвитком техніки. Розроблені класифікації машин, прогнозуються машини майбутнього. Знання загальних закономірностей процесу створення нових і експлуатації діючих машин необхідні сучасному інженеру, щоб оптимально вирішувати питання технології та автоматизації процесів. Інженер повинен знати не тільки загальні принципи побудови механізмів, а і принципи їх розрахунків і проектування.

Даний методичний посібник з курсу «Прикладна механіка», який вивчають одним з перших загально-інженерних дисциплін, є обов'язковим для підготовки бакалаврів зі спеціальності 141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка» галузі знань 14 «Електрична інженерія».

Для вивчення «Прикладної механіки» необхідні знання з вищої математики, фізики, інженерної графіки. «Прикладна механіка» потребує попереднього вивчення обов'язкової дисципліни «Теоретична механіка», на основи якої спирається подальший навчальний матеріал.

Основними завданнями вивчення дисципліни «Прикладна механіка» є надання студентам знань з методів найпростіших розрахунків з теорії механізмів, опору матеріалів, деталей машин; знань основних характеристик механізмів і машин, видів з'єднань деталей машин, механічних передач, осей і валів та їх опор, елементів приводів машин.

У результаті освоєння «Прикладної механіки» студент повинен знати визначення та зміст, який закладено в основних термінах, що використовуються в прикладній механіці; методи найпростіших розрахунків основних характеристик механізмів; методи розрахунків на міцність і жорсткість елементів конструкцій; структуру і призначення механізмів, характеристики та застосування деталей машин загального призначення у електромеханічних приводах.

Прикладна механіка – це комплексна дисципліна, яка складається з ряду розділів, що включають відомості з теорії механізмів і машин, опору матеріалів, деталей машин та вузлів машин.

Теорія механізмів і машин розглядає питання: структура механізмів; основні види та характеристики виконавчих механізмів машин: важільних, кулачкових, зубчастих; основи кінематичного і динамічного аналізу механізмів у загальному машинобудуванні.

У розділі «Опір матеріалів» наведені основні гіпотези опору матеріалів, механічні характеристики міцності матеріалів; викладені інженерні методи розрахунку простіших елементів конструкцій на міцність, жорсткість та стійкість.

У розділі «Деталі машин» вивчають критерії працездатності та надійності деталей машин, інженерні методи розрахунків деталей і вузлів машин загального призначення. Деталі машин використовуються у електромеханічних приводах машин, є складовими різноманітних машин сучасної техніки, у тому числі вантажопід'ємних, транспортуючих, технологічних машин.

Зміст даного посібника включає першу частину курсу, в якій викладений основний матеріал двох складових «Прикладної механіки»: теорії механізмів і машин та опору матеріалів.

Курс прикладної механіки забезпечує у подальшому можливість аналізувати структуру і кінематику руху механізмів, з яких складається машина та її електропривод; зрозуміти роботу і склад приводу; взаємодію та призначення елементів конструкцій, їх основні характеристики; знати за рахунок яких критеріїв забезпечується працездатність механізмів.

## 1. ОСНОВИ ТЕОРІЇ МЕХАНІЗМІВ

У розділі «Основи теорії механізмів», який структурно є першим розділом курсу прикладної механіки вивчають структуру, кінематику і динаміку механізмів. Важливо підкреслити, що методи теорії механізмів і машин придатні для проектування будь-якого механізму і не залежать від його технічного призначення, а також фізичної природи робочого процесу машини.

**Механізм** – сукупність тіл, рухливо з'єднаних між собою, яка призначена для перетворення заданого руху одного або декількох тіл у необхідний рух інших тіл.

**Машина** – обладнання, яке здійснює механічні рухи для перетворення енергії, матеріалів і інформації з метою заміни або полегшення фізичної й розумової діяльності людини. У *технологічних машинах* змінюються форми, геометричні розміри і властивості вихідних матеріалів та заготовок (металообробні верстати, прокатні стани, ткацькі верстати, технологічне обладнання харчових виробництв, пакувальні автомати й ін.). За допомогою *транспортних машин* та пристроїв відтворюється переміщення вантажів, людей та інших об'єктів у просторі (автомобілі, літаки, крани, транспортери й ін.). У *енергетичних машинах* здійснюється перетворення будь-якого виду енергії (електродвигуни, парові машини, електрогенератори й ін.). У *інформаційних машинах* реалізується перетворення введеної інформації для контролю, регулювання та управління рухом.

*Машина-автомат* – машина, у якій всі операції виконуються автоматично, без участі людини. *Автоматична лінія* – сукупність машин-автоматів, з'єднаних між собою транспортуючими пристроями. Для повністю автоматизованого виробництва використовують *робототехнічні системи*, які є елементами зв'язку окремих технологічних операцій в єдиний ланцюг. Системи автоматичної дії мають системи *програмного керування*, які забезпечують адаптацію об'єктів до зміни зовнішніх умов.

В машинах для передачі і перетворення руху використовують *механізми*.

### 1.1. Структурний аналіз механізмів

Розглянемо основні поняття та визначення теорії механізмів.

Тверді тіла, з яких утворюється механізм називають **ланками**. *Вхідна ланка* – ланка, якій надається рух, перетворений механізмом у необхідний рух. *Вихідна ланка* – ланка механізму, яка здійснює необхідний рух. *Ведуча ланка* –

ланка, для якої робота зовнішніх сил є додатною. *Ведена ланка* – ланка, для якої робота зовнішніх сил є від’ємною або дорівнює нулю.

**Кінематичною парою** називають рухливе з’єднання двох стичних ланок. Сукупність поверхонь, ліній і точок ланок, які стикаються з іншою ланкою пари називають *елементом пари*.

Кінематичні пари (КП) класифікуються за числом ступенів рухомості (вільності) та за виглядом елемента КП.

За першою ознакою КП підрозділяються на п’ять класів – від *однорухомих* (пара першого класу) до *п’ятирухомих* (пара п’ятого класу). Для визначення класу (рухливості) КП за цією ознакою треба одну з її ланок вважати умовно нерухомою і розглянути всі можливі незалежні відносні рухи другої ланки. На рис. 1.1,а представлена КП, яка складається із плоскої ланки 1 і циліндра 2. З’єднаємо з ланкою 1 просторову систему координат  $ZYX$ . За умови, що ланка 1 нерухома, ланка 2 може здійснювати наступні незалежні рухи: поздовжні переміщення  $S_X, S_Y$  уздовж осей  $OX$  і  $OY$  і обертання  $\varphi_X, \varphi_Z$  навколо осей  $OX$  і  $OZ$ .

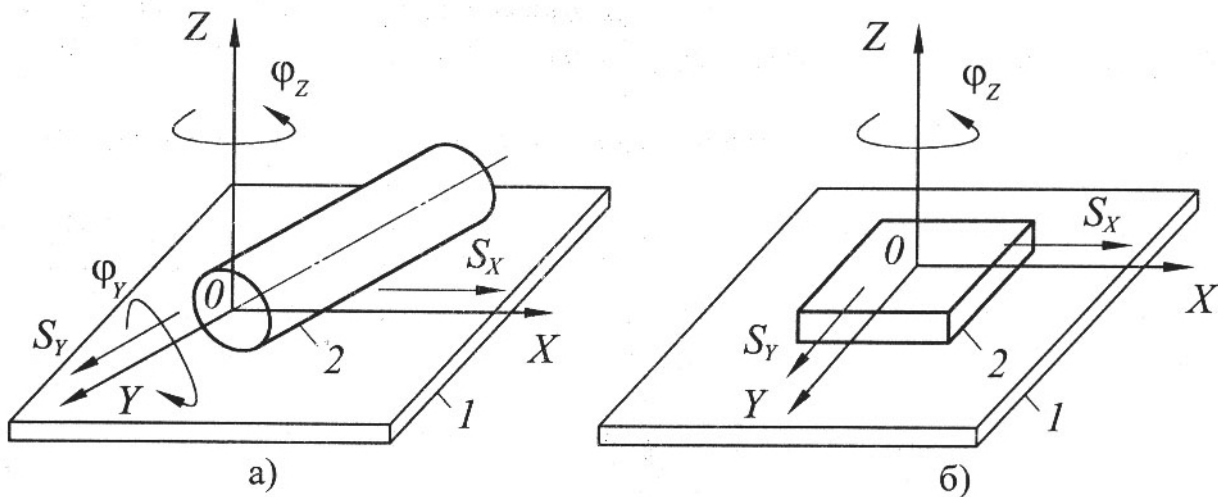
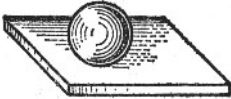

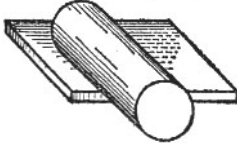

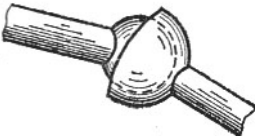

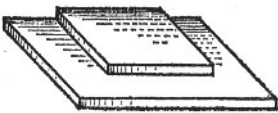

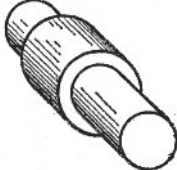

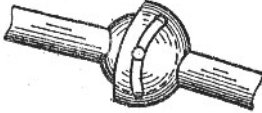

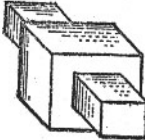

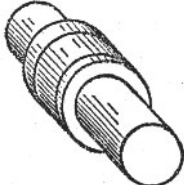



Рис.1.1 – Приклади кінематичних пар


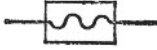
Потрібно звернути увагу на те, що при всіх цих рухах початкові умови контакту ланок 1 і 2 не порушуються, а саме, лінія контакту залишається незмінною, однак вона може міняти своє положення на площині. Отже, розглянута КП має чотири ступеня вільності, тобто це чотирирухлива кінематична пара або пара четвертого класу. Легко установити, що КП, представлена на рис.1,б має три ступеня вільності (пара третього класу).

У табл.1.1 наведені найрозповсюдженіші кінематичні пари і їх умовні позначення на схемах.

Таблиця 1.1

Кількість ступенів вільності	Кількість зв'язків	Назва пари	Рисунок	Умовне позначення
1	2	3	4	5
5	1	Куля – площина		
4	2	Циліндр – площина		
3	3	Сферична		
3	3	Площинна		
2	4	Циліндри- чна		
2	4	Сферична з пальцем		
1	5	Посту- пальна		
1	5	Оберталь- на		



1	2	3	4	5
1	5	Гвинтова		

У табл. 1.1 наведена також колонка **числа зв'язків** представлених КП – кількості обмежень на можливі незалежні відносні рухи ланок, які утворюють КП. Сума числа зв'язків  $S$  і числа ступенів вільності  $H$  дорівнює шести.

Залежно від вигляду елемента кінематичні пари підрозділяють на **вищі** (елементи КП – точки або лінії) і **нижчі** (елементи КП – поверхні). Відповідно до цього визначення кінематична пара на рис.1.1,а є вищою, а на рис.1.1,б – нижчою.

Сукупність ланок, які утворюють між собою кінематичні пари, називають **кінематичним ланцюгом** (КЛ). Кінематичні ланцюги підрозділяють на **плоскі** й **просторові, відкриті й замкнуті, прості й складні**. У плоских КЛ відносні рухи ланок відбуваються паралельно одній й тій же площині. Прості КЛ містять ланки, які мають одну або дві кінематичні пари. Складні КЛ містять хоча б одну ланку, яка має три й більше кінематичні пари. На рис.1.2, із застосуванням умовних позначень кінематичних пар (див. табл.1.1), представлені різні кінематичні ланцюги: а) простий, відкритий, просторовий; б) простий, замкнутий, плоский; в) складний, замкнутий, просторовий.

Кінематичний ланцюг входить до складу будь-якого механізму. Від КЛ легко перейти до механізму шляхом закріплення однієї з його ланок з нерухомою системою відліку. Нерухомих ланку називають *стояком*. Наприклад, якщо в КЛ (рис. 1.2,б) ланку 4 виконати нерухомою, то одержимо механізм, який називається **шарнірним чотириланковим**.

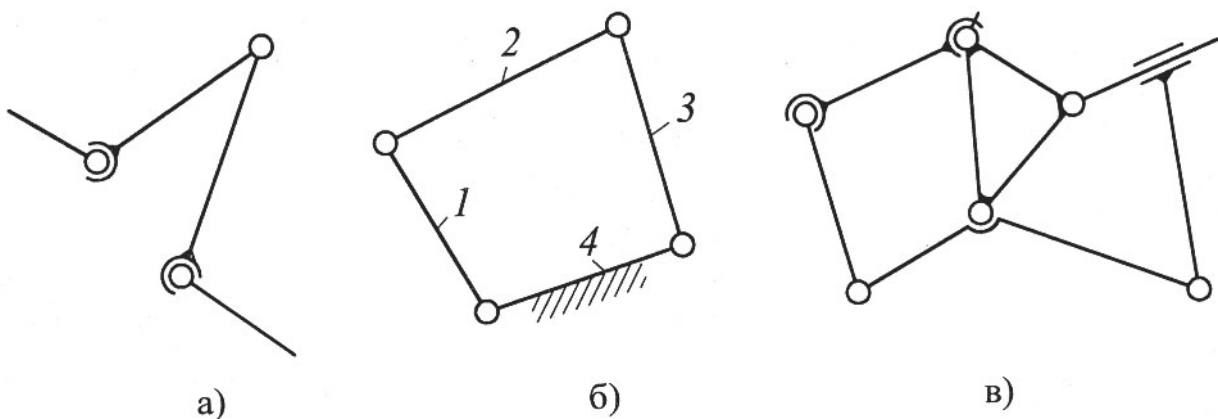


Рис.1.2 – Приклади кінематичних ланцюгів

Механізми, які містять тільки нижчі кінематичні пари, називають **важільними** або стрижневими. Найбільш розповсюджені в них ланки: *кривошип* – ланка, яка здійснює повний оберт відносно стояка; *коромисло* –

ланка, яка здійснює коливальний рух відносно стояка, *шатун* – ланка, яка не має кінематичної пари зі стояком; *повзун* – ланка, яка утворює поступальну КП зі стояком; *куліса* – ланка, яка утворює обертальну КП зі стояком й поступальну КП із іншою рухливою ланкою.

Залежно від співвідношення довжин рухливих ланок і стояка, шарнірний чотириланковий механізм може бути двокривошипним, кривошипно-коромисловим і двокоромисловим механізмом.

**Узагальненими координатами** механізму називають незалежні між собою координати, які визначають положення всіх ланок механізму відносно стояка. Ланку, якій приписують одну або декілька узагальнених координат механізму, називають *початковою ланкою*. **Числом ступенів вільності** механічної системи називають кількість можливих переміщень системи. Число узагальнених координат механізму дорівнює числу його ступенів вільності, якщо всі зв'язки в кінематичній парі геометричні, тобто накладають обмеження тільки на положення ланок. **Число ступенів вільності механізму  $W$**  показує кількість тих ланок, яким із зовнішнього джерела надається незалежний рух.

Вільне тіло в просторі має шість ступенів вільності  $H=6$  (три обертання й три поступальних переміщення відносно осей просторової системи координат). Якщо механізм складається з  $n$  рухливих ланок, то загальне число їх ступенів рухомості

$$\Sigma H = 6 \cdot n . \quad (1.1)$$

Нехай у результаті взаємного з'єднання ланок механізму, у тому числі зі стояком, утворюються кінематичні пари від однорухомих  $p_1$  до п'ятирухомих  $p_5$ . Тоді загальне число зв'язків у механізмі

$$\Sigma S = 5 \cdot p_1 + 4 \cdot p_2 + 3 \cdot p_3 + 2 \cdot p_4 + p_5 . \quad (1.2)$$

Число ступенів вільності механізму

$$W = \Sigma H - \Sigma S . \quad (1.3)$$

Вираз (1.3) називають **формулою Сомова-Малишева**. Якщо механізм плоский, то  $\Sigma H = 3 \cdot n$ , а число зв'язків  $\Sigma S = 2 \cdot p_1 + p_2$ . Тоді число ступенів вільності механізму

$$W = 3 \cdot n - 2 \cdot p_1 - p_2 . \quad (1.4)$$

Вираз (1.4) називають **формулою Чебишева**. Наприклад, для механізму (див. рис.1.2,б) маємо:  $n=3$ ,  $p_1=4$ ,  $p_2=0$ ,  $W=3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 - 0 = 1$ .

Відповідно до структурної класифікації плоских механізмів, розробленої Л.В. Ассуром та І.І. Артоболевським, механізм може бути створений шляхом приєднання до одного або декількох початкових ланок і стояку кінематичних ланцюгів – структурних груп нульової рухомості відносно тих ланок, до яких група приєднується.

**Структурна група або група Ассура** - це кінематичний ланцюг, який має нульовий ступінь рухливості. Для груп Ассура, складених із плоских

кінематичних ланцюгів і утримуючих тільки однорухомі кінематичні пари, відповідно формулі (1.4), маємо  $W = 3n - 2p_1 = 0$ . Звідси

$$p_1 = \frac{3}{2}n. \quad (1.5)$$

З (1.5) випливає, що число  $n$  може приймати значення з парного ряду чисел  $n = 2, 4, 6 \dots$ . При  $n = n_{\min} = 2$ , одержимо  $p_1 = 3$ . На рис. 1.3,а представлена така група. При  $n = 4$ ,  $p_1 = 6$  одержимо інші різновиди груп (рис. 1.3,б,в).

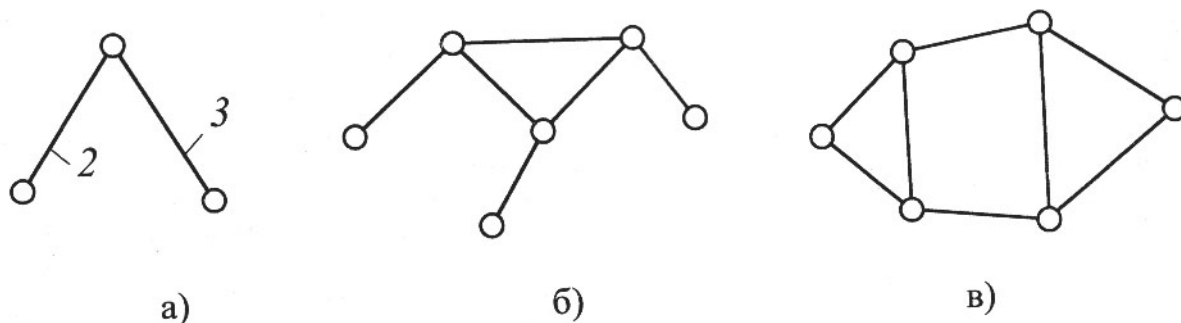


Рис. 1.3 – Групи Ассура 2-го – а), 3-го – б), 4-го – в) класів

**Клас групи Ассура** визначають найвищим класом замкнутого контуру, який входить до складу групи. Клас групи визначають числом кінематичних пар, що входять у контур. Отже, на рис. 1.3 представлені групи 2-го, 3-го й 4-го класів. Розрізняють також *порядок групи*. Його визначають числом вільних елементів кінематичних пар ланок групи, за допомогою яких дана група приєднується до інших ланок. На рис. 1.3 представлені групи 2-го а), в) і 3-го б) порядків.

Для визначення класу механізму необхідно визначити спочатку число ступенів його вільності, вибрати вхідні ланки, а потім виділити групи Ассура, починаючи з найбільш вилученої від вхідних ланок. **Клас механізму** визначають найвищим класом групи Ассура, яка входить до складу механізму. Залежно від класу механізму та виду структурних груп використовують різні методи кінематичного та силового аналізу.

**Приклад.** Визначимо клас механізму, схема якого представлена на рис. 4,а. З формули (1.4) знаходимо  $W = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 7 = 1$ . Як вхідну вибираємо ланку 1. Тоді спочатку виділяємо групу Ассура 4-5 (рис. 1.4,б), а потім – групу 2-3 (рис. 1.4,в). Визначаємо клас груп – обидві групи другого класу. Залишається основа механізму із вхідною (початковою) ланкою 1 (рис. 1.4,г). Отже, досліджуваний механізм є механізмом другого класу.

Слід зазначити, що в деяких механізмах їх клас залежить від вибору вхідної ланки. Чим вищий клас механізму, тим складніше рішення задач його кінематичного й динамічного дослідження.

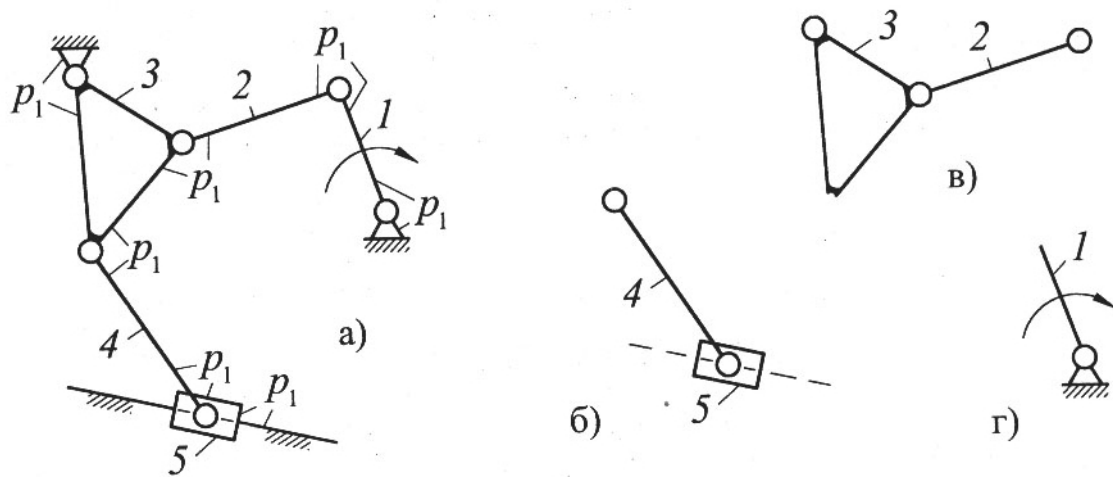


Рис. 1.4 – Схема механізму – а),  
групи Ассура – б) і в), основа механізму із вхідною ланкою – г)

## 1.2. Кінематичний аналіз важільних механізмів

**Аналіз механізмів.** Кінематичний аналіз механізмів полягає у визначенні зміни характеру руху ланок механізму за заданим законом руху початкових (вхідних) його ланок. Відзначимо, що при кінематичному аналізі механізму, основні його геометричні розміри, які характеризують його кінематику, відомі.

Основними задачами кінематичного аналізу є:

- 1) визначення положення ланок;
- 2) визначення швидкостей і прискорень ланок і окремих їх точок.

Допущення, прийняті при кінематичному аналізі: ланки вважають абсолютно жорсткими; зазори в кінематичних парах відсутні.

**Синтез механізмів.** Проектування схем механізмів за заданими їх кінематичними властивостями, називають кінематичним синтезом механізмів.

Розрізняють два етапи синтезу:

- 1) вибір структурної схеми;
- 2) визначення постійних геометричних параметрів вибраної схеми механізму за заданими його властивостями.

Допущення, прийняті при кінематичному аналізі, справедливі й для кінематичного синтезу. Слід зазначити, що кінематичний аналіз і синтез є прямою й зворотною задачами; це буде показано надалі.

**Методи рішення.** Кінематичний аналіз і синтез можна виконати трьома методами – **аналітичним**, **графоаналітичним** і **графічним**. Найбільш трудомістким в аналітичному методі є знаходження функції положення механізму, після чого визначення швидкостей і прискорень не являє собою складності. Метод дозволяє одержати будь-яку задану точність розрахунків. Графоаналітичний метод менш точний, але дозволяє візуально легко аналізувати рухи всіх ланок, тобто робить наочними результати досліджень. Графічний метод дає наближені значення шуканих параметрів, які цікавлять

нас, тому він застосовується рідко, в основному, якщо потрібно одержати наочне уявлення про кінематичні показники із грубим наближенням.

**1.2.1. Аналітичний метод.** Рішення поставленої задачі проілюструємо на прикладі шарнірного чотириланкового механізму (рис. 1.5).

Механізм має одну узагальнену координату. Припустимо, задане значення кута  $\varphi$ , який визначає положення вхідної ланки  $OA$ , потрібно визначити значення кута  $\psi$  за умови, що довжини ланок відомі. Приписуємо ланкам чотириланкового механізму властивості векторів. Тоді, через замкнутість контуру  $OABC$ , запишемо

$$\vec{l}_0 + \vec{l}_3 - \vec{l}_1 = \vec{l}_2. \quad (1.6)$$

Звівши рівняння (1.6) у квадрат, одержимо

$$l_0^2 + l_3^2 + l_1^2 + 2 \cdot l_0 \cdot l_3 \cdot \cos \psi - 2 \cdot l_0 \cdot l_1 \cdot \cos \varphi - 2 \cdot l_1 \cdot l_3 \cdot \cos(\psi - \varphi) = l_2^2. \quad (1.7)$$

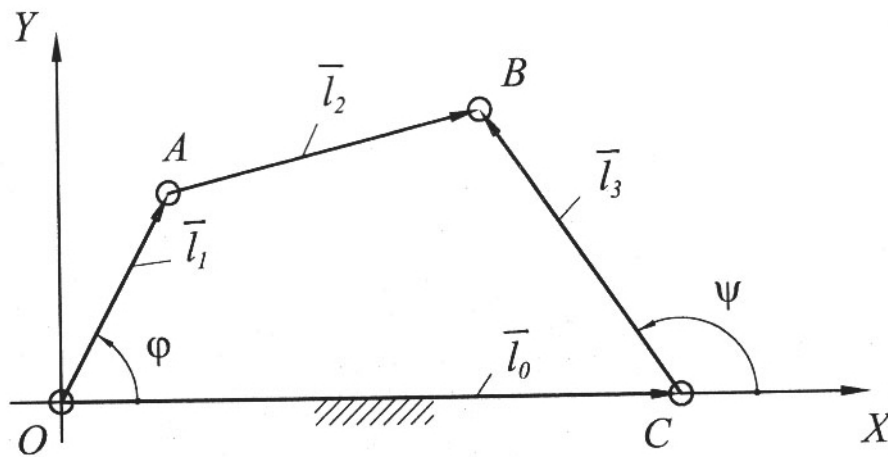


Рис. 1.5 – Механізм шарнірний чотириланковий

У рівнянні (1.7) усі постійні коефіцієнти відомі. Тому при заданому значенні  $\varphi$  можна визначити значення кута  $\psi$ , що є рішенням задачі *кінематичного аналізу*. Після перетворення дане рівняння приймає вигляд

$$A \cdot \sin \varphi + B \cdot \cos \psi + C = 0, \quad (1.8)$$

де  $A, B$  і  $C$  - відомі коефіцієнти, які залежать від кута  $\varphi$  й розмірів ланок  $l_0, l_1, l_2, l_3$ .

Рішення рівняння (1.8) зводиться до рішення квадратного рівняння відносно тангенса половинного кута.

**1.2.2. Графоаналітичний метод.** Графоаналітичний метод при кінематичному аналізі передбачає побудову положень механізму, планів швидкостей і планів прискорень.

Відзначимо, що останнім часом кінематичний аналіз механізмів виконують, як правило, аналітичним методом. Для попереднього визначення кінематичних параметрів, а також для перевірки правильності аналітичних обчислень застосовують найпростіші побудови, відомі за назвою **положень механізму, планів швидкостей і прискорень**.

Побудову цих планів покажемо на прикладі шестиланкового важільного механізму із вхідною ланкою  $AB$  (рис.1.6,а).

При заданому значенні кута  $\Phi_1$  й геометричних розмірів ланок, положення механізму будується методом зарубок. На кресленні відзначаємо точки  $A, D$  і напрямок  $x-x$ . Визначаємо положення кривошипа: під кутом  $\Phi_1$  із точки  $A$  проводимо промінь, на якому визначаємо точку  $B$ , виконавши зарубку радіусом  $l_1$ . Положення точки  $C$  знаходимо в результаті перетинання двох дуг окружностей, проведених із точок  $B$  і  $D$  із радіусами  $l_2$  й  $l_{31}$ . Через кут  $\mu = const$  і довжину  $l_{32}$  знаходимо положення точки  $E$ . Положення точки  $G$  знаходимо, виконавши зарубку радіусом  $l_4$  на напрямній  $x-x$ .

Аналогічно будують положення механізмів другого класу будь-якої складності.

Усі побудови при рішенні задачі кінематичного аналізу (також і синтезу) повинні виконуватися в певному креслярському масштабі ( $M1:2, M1:1, M2:1$  і т.д.), або в масштабному коефіцієнті. **Масштабним коефіцієнтом** фізичної величини називають відношення її чисельного значення у властивих їй одиницях, до довжини відрізка креслення в міліметрах, який зображує цю величину. Наприклад, масштабний коефіцієнт довжини  $\mu_l = \frac{l_1}{AB}, \frac{м}{мм}$ .

Отже, задане положення механізму й кутова швидкість його вхідної ланки  $\omega_1 = const$ . Необхідно визначити швидкості й прискорення точок  $B, C, E, G$ , а також кутові швидкості й прискорення ланок 2,3,4.

Спочатку визначаємо швидкість точки  $B$ :  $V_B = \omega_1 \cdot l_1$ . Якщо задано частоту обертання  $n_1$ , то  $\omega_1 = \pi \cdot n_1 / 30, c^{-1}$ . Зобразимо швидкість  $\bar{V}_B$  вектором  $\overline{p_V b}$ , відкладеним із точки  $p_V$ , яка називається *полюсом плану швидкостей* (рис.1.6,б). Тоді масштабний коефіцієнт  $\mu_V = V_B / (p_V b), \frac{м/с}{мм}$ . Потім знаходимо швидкість точки  $C$ , скориставшись теоремою про додавання швидкостей у переносному й відносному рухах. Запишемо

$$\bar{V}_C = \bar{V}_B + \bar{V}_{CB}, \quad (1.9)$$

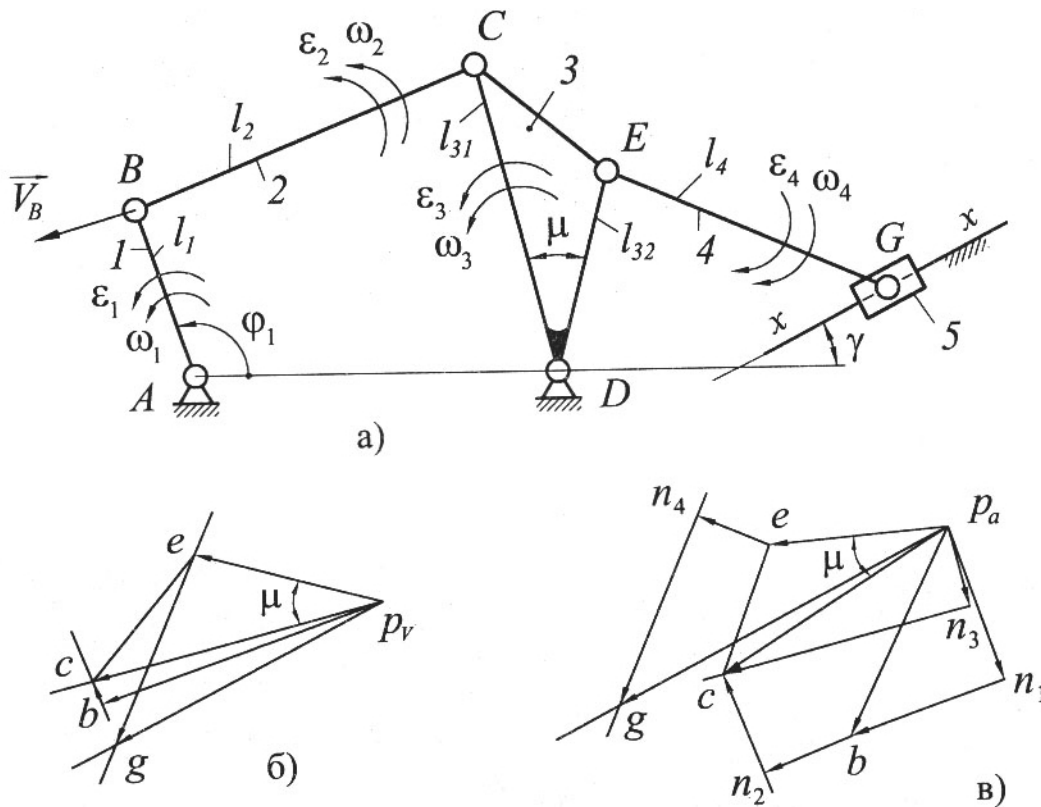


Рис. 1.6 – Шестиланковий важільний механізм – а),  
із планом швидкостей – б) і планом прискорень – в)

де  $\bar{V}_C \equiv \bar{V}_{CD}$  – абсолютна швидкість точки  $C$ , перпендикулярна поздовжній осі ланки  $CD$ ;

$\bar{V}_B$  – переносна швидкість точки  $C$  (швидкість точки  $B$ ), перпендикулярна поздовжній осі ланки  $AB$ ;

$\bar{V}_{CB}$  – швидкість точки  $C$  відносно точки  $B$  у їх відносному русі, перпендикулярна поздовжній осі ланки  $CB$ .

Векторне рівняння (1.9) рівносильне двом скалярним рівнянням, отже, з їх спільного рішення можна знайти невідомі величини  $\bar{V}_C$  й  $\bar{V}_{CB}$ . Однак, їх можна простіше знайти графічною побудовою трикутника векторів. Для цього з точки  $b$  проводимо лінію, перпендикулярну  $BC$ , а з полюса  $p_v$  – лінію, перпендикулярну  $DC$  (див. рис. 1.6,б). Перетинання цих прямих визначає точку  $c$ . Тоді швидкість точки  $C$  дорівнює  $V_C = (p_v c) \cdot \mu_v$ . Відповідно до векторного рівняння (1.9) швидкість  $\bar{V}_{CB}$  на плані швидкостей спрямована від точки  $b$  до точки  $c$ . Маючи відносні швидкості, легко визначити кутові швидкості шатуна 2 і коромисла 3. Маємо:

$$\omega_2 = \frac{V_{CB}}{l_{CB}} = \frac{(cb) \cdot \mu_v}{l_{CB}}, \quad \omega_3 = \frac{V_{CD}}{l_{CD}} = \frac{(cp_v) \cdot \mu_v}{l_{CD}}.$$

Напрямки векторів  $\bar{V}_{CB}$  і  $\bar{V}_{CD}$  дозволяють визначити напрямки обертання ланок 2 і 3. Для цього необхідно

мислено ці вектори перенести в точку  $C$  і розглянути її обертання відносно точок  $B$  і  $D$ . Далі визначаємо швидкість точки  $E$ :  $V_E = \omega_3 \cdot l_{DE}$  і на плані швидкостей, у масштабному коефіцієнті  $\mu_V$ , відкладаємо вектор  $\overline{p_V e}$ . Легко помітити, що трикутники  $DEC$  й  $p_V ec$  подібні, тому положення точки  $e$  можна було одержати також побудовою на відрізку  $(p_V c)$  трикутника  $p_V ec$ , подібного до трикутника  $DEC$ . Відзначимо, що зазначена властивість справедлива для будь-якої ланки будь-якого механізму, а саме: *на планах швидкостей отримуємо картини, подібні таким же картинам на схемі механізму з однаковістю напрямку читання букв, наприклад, dec і DEC*. Швидкість точки  $G$  знаходимо за допомогою векторного рівняння

$$\overline{V}_G = \overline{V}_E + \overline{V}_{GE}, \quad (1.10)$$

де  $\overline{V}_G$  – абсолютна швидкість точки  $G$ , паралельна напрямній  $x$ - $x$  ланки 5;

$\overline{V}_E$  – переносна поступальна швидкість, перпендикулярна поздовжній осі ланки  $DE$ ;

$\overline{V}_{GE}$  – швидкість точки  $G$  відносно точки  $E$  в їх відносному русі, перпендикулярна поздовжній осі ланки  $GE$ .

З точки  $e$  на плані швидкостей проводимо пряму, перпендикулярну прямій  $GE$ , а з полюса – пряму, паралельну напрямній  $x$ - $x$ . Точка  $g$  перетинання проведених прямих визначає швидкість точки  $G$ :  $V_G = (p_V g) \cdot \mu_V$ .

Кутова швидкість ланки 4 є  $\omega_4 = \frac{V_{GE}}{l_{GE}} = \frac{(ge) \cdot \mu_V}{l_{GE}}$ , а напрямок вектора швидкості  $\overline{V}_{GE}$  визначає напрямок обертання ланки 4.

Побудову плану прискорень пояснимо на цьому ж прикладі за умови, що кутове прискорення  $\varepsilon_1$  вхідної ланки відоме. Повне прискорення точки  $B$  складається із двох складових: нормального прискорення  $a_B^n = \omega_1^2 \cdot l_{AB}$ , спрямованого до центра обертання, й дотичного прискорення  $a_B^\tau = \varepsilon_1 \cdot l_{AB}$ , спрямованого перпендикулярно ланці  $AB$ , у бік кутового прискорення  $\varepsilon_1$ . З довільної точки  $p_a$  – полюса плану прискорень (рис. 1.6,в) відкладаємо прискорення  $\overline{a_B^n}$  вектором  $\overline{p_a n_1}$ ; при цьому вибираємо масштабний коефіцієнт плану прискорень  $\mu_a = \frac{a_B^n}{(p_a n_1)}, \frac{м/с^2}{мм}$ . Далі з точки  $n_1$  відкладаємо вектор  $\overline{n_1 b}$ ,

який зображує дотичне прискорення точки  $B$ , його довжину  $(n_1 b) = a_B^\tau / \mu_a$ . Прискорення точки  $C$  знаходимо з рівняння, аналогічного рівнянню (1.9), представляючи повні прискорення у вигляді суми двох доданків – нормального й дотичного



$$\bar{a}_B^n + \bar{a}_B^\tau + \bar{a}_{CB}^n + \bar{a}_{CB}^\tau = \bar{a}_{CD}^n + \bar{a}_{CD}^\tau, \quad (1.11)$$

де значення нормальних прискорень обчислюємо за формулами:  $a_{CB}^n = \omega_2^2 \cdot l_{CB}$ ,  $a_{CD}^n = \omega_3^2 \cdot l_{CD}$ , а відрізки, які зображують ці прискорення визначаємо так:  $(bn_2) = a_{CB}^n / \mu_a$ ,  $(p_a n_3) = a_{CD}^n / \mu_a$ . Вектор  $\bar{a}_{CB}^n$  направляємо по лінії  $CB$  від точки  $C$  до точки  $B$ , а  $\bar{a}_{CD}^n$  – по лінії  $CD$  від точки  $C$  до точки  $D$ . Перпендикулярно нормальним прискоренням із точок  $n_2$  і  $n_3$  проводимо прямі, які визначають напрямки дотичних прискорень. Точка  $c$  перетинання цих прямих – кінець вектора  $\bar{a}_C$  прискорення точки  $C$ . Модуль даного прискорення  $a_C = (p_a c) \cdot \mu_a$ . Переносимо в думці вектори  $\bar{a}_{CB}^\tau$  й  $\bar{a}_{CD}^\tau$  у точку  $C$ , визначаємо напрямки кутових прискорень  $\varepsilon_2$  і  $\varepsilon_3$  ланок 2 і 3 відповідно. Модулі цих прискорень знаходимо за формулами:

$$\varepsilon_2 = \frac{a_{CB}^\tau}{l_{CB}} = \frac{(n_2 c) \cdot \mu_a}{l_{CB}}, \quad \varepsilon_3 = \frac{a_{CD}^\tau}{l_{CD}} = \frac{(n_3 c) \cdot \mu_a}{l_{CD}}.$$

Точку  $e$  на плані прискорень визначимо при побудові  $\Delta ser_a$ , подібного  $\Delta CED$ , тоді прискорення точки  $E$ :  $a_E = (p_a e) \cdot \mu_a$ .

Для визначення прискорення точки  $G$  запишемо векторне рівняння

$$\bar{a}_G = \bar{a}_E + \bar{a}_{GE}^n + \bar{a}_{GE}^\tau. \quad (1.12)$$

У цьому рівнянні шуканий вектор  $\bar{a}_G$  паралельний напрямній  $x-x$ . Нормальне прискорення  $\bar{a}_{GE}^n$ , модуль якого  $a_{GE}^n = \omega_4^2 l_{GE}$ , спрямовано по лінії  $GE$  від точки  $G$  до точки  $E$ . Дотичне прискорення  $\bar{a}_{GE}^\tau$  – перпендикулярне нормальному  $\bar{a}_{GE}^n$ . Відрізок, який зображує на плані прискорень вектор  $\bar{a}_{GE}^n$ , дорівнює  $(en_4) = a_{GE}^n / \mu_a$ . Графічно вирішивши векторне рівняння (1.12), визначаємо прискорення точки  $G$ :  $a_g = (p_v g) \mu_a$ . Величина кутового прискорення ланки 4  $\varepsilon_4 = \frac{a_{GE}^\tau}{l_{GE}} = \frac{(n_4 g) \cdot \mu_a}{l_{GE}}$ , його напрямок визначається вектором  $\bar{a}_{GE}^\tau$ .

Із плану прискорень бачимо, що в досліджуваному положенні механізму напрямок прискорення  $\bar{\varepsilon}_2$  збігається з напрямком швидкості  $\bar{\omega}_2$ ,  $\bar{\varepsilon}_3$  – з  $\bar{\omega}_3$ ,  $\bar{\varepsilon}_4$  – з  $\bar{\omega}_4$ . Однак, для інших положень механізму це може не відтворюватися.

### 1.3. Зубчасті механізми

**Зубчастими** називають механізми (передачі), у яких рух між ланками (зубчастими колесами) передається за допомогою послідовно взаємодіючих поверхонь зубів (рис. 1.7).

Ці механізми широко використовують у машинах і приладах для передачі й перетворення руху в широкому діапазоні потужностей (до 150 тис. кВт) і швидкостей (до 200 м/с). Передачі мають високі техніко-економічні показники: високу надійність роботи, високий коефіцієнт корисної дії (ККД) (до 0,97...0,98 для однієї пари коліс), простоту технічного обслуговування, компактність (малу масу). Недоліки передач обумовлені порівняно високою трудомісткістю виготовлення коліс, шумом при роботі, неможливістю плавно змінювати значення кінематичних параметрів у процесі роботи й ін.

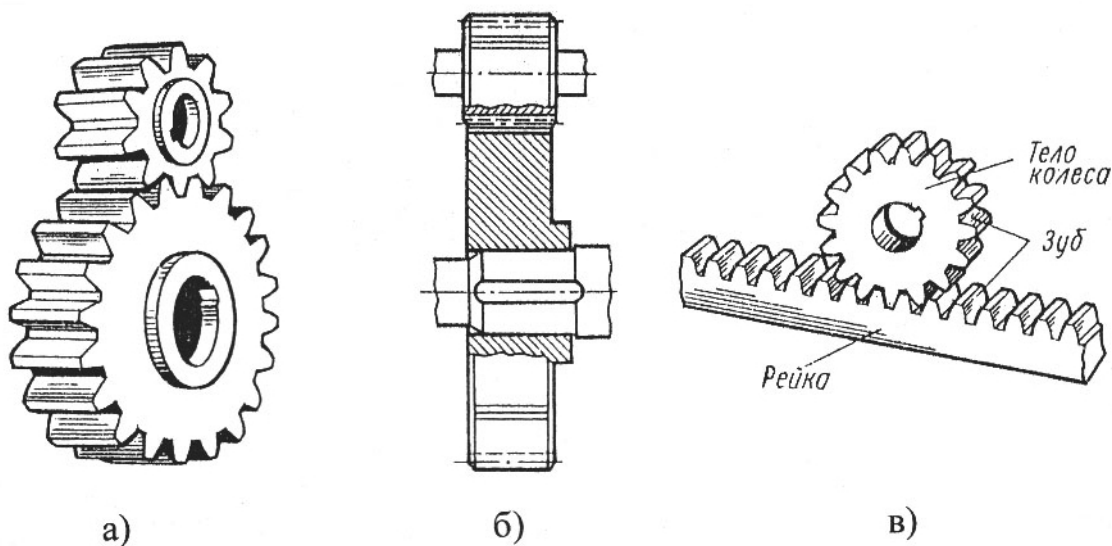


Рис.1.7 – Прямозубі передачі: а) загальний вигляд, б) переріз передачі, в) передача колесо-рейка (рейкова передача)

Вищу кінематичну пару, яка створена послідовно взаємодіючими поверхнями зубів, називають **зубчастим зачепленням**. Взаємодіючі поверхні ланок вищої КП називають **сполученими поверхнями**. Для передачі безперервного руху в одному напрямку треба мати декілька послідовно взаємодіючих пар сполучених поверхонь, які розташовані на виступах, що називаються **зубами**. Лінію перетинання поверхні зуба з якою-небудь площиною (наприклад, із площиною, перпендикулярною осі обертання колеса) називають **профілем зуба**. Два зачеплених між собою зубчастих колеса з нерухомими осями обертання називають **одноступінчастою передачею** (див. рис. 1.7, а, б) або **ступенем**, якщо механізм складається з декількох зубчастих передач.

Зубчасті передачі класифікують за геометричними й функціональними особливостями.

За взаємним розташуванням осей їх підрозділяють на **циліндричні** (осі обертання коліс паралельні, рис. 1.7,а,б), **конічні** (осі обертання коліс перетинаються, рис. 1.8,а) і **гіперболоїдні** (осі обертання ланок перехрещуються: черв'ячні – рис. 1.8,б, гвинтові – рис. 1.8,в, гіпоїдні – рис. 1.25,б).

За відносним розташуванням поверхонь вершин і западин зубів коліс: на передачі **зовнішнього зачеплення** (рис. 1.7,а,б, рис. 1.8,а,б,в), передачі **внутрішнього зачеплення** (рис. 1.8,г) і **рейкові передачі** (рис. 1.7,в), які є окремим випадком триланкових зубчастих механізмів.

За характером руху осей обертання коліс: на **звичайні передачі** – осі обертання всіх коліс нерухомі й **епіциклічні передачі** – осі обертання одного або декількох коліс рухливі.

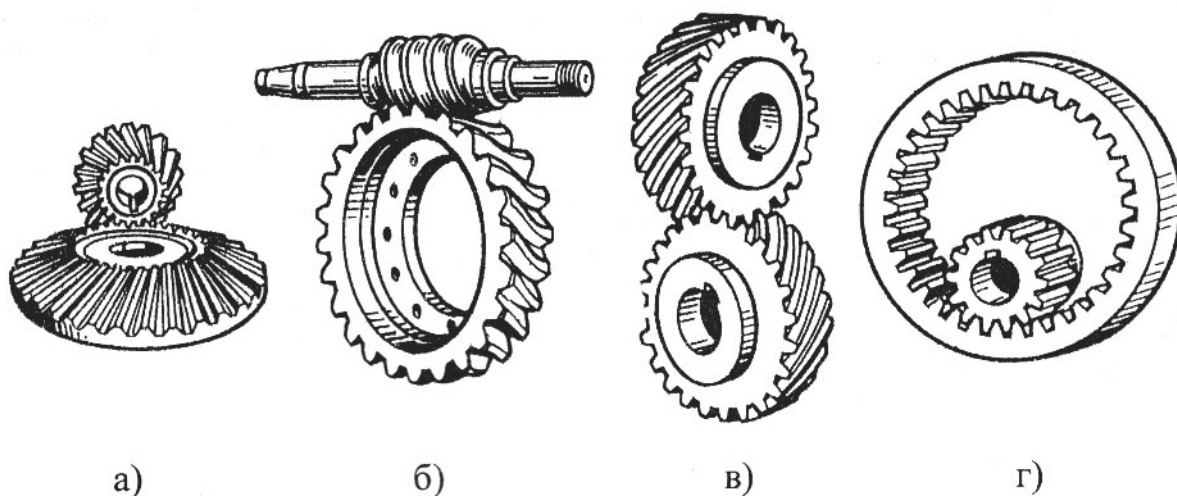


Рис. 1.8 – Зубчасті передачі: а) конічна, б) черв'ячна, в) гвинтова, г) циліндрична із внутрішнім зачепленням

За розташуванням утворюючих бічних поверхонь зубів відносно осі обертання: на **прямозубі передачі** – передачі із прямолінійними зубами (рис. 1.7,а,б,в, рис. 1.8,г) і на **передачі із криволінійними зубами** (рис. 1.8,а,б,в) – з косими, круговими, спіральними, евольвентними й ін. У прямозубих передачах утворюючі бічних поверхонь зубів паралельні осі обертання колеса, а в косозубих передачах – утворюють деякий кут.

За **формою профілів зубів** коліс: на передачі з **евольвентним зачепленням** – профілі зубів обкреслені евольвентою окружності, передачі із **циклоїдальним зачепленням** – профілі зубів обкреслені дугами епі- або гіпоциклоїди, передачі із **зачепленням Новікова** – профілі зубів обкреслені дугами окружностей, причому опуклі профілі зубів одного колеса взаємодіють з увігнутими профілями зубів іншого колеса.

**Залежно від призначення** зубчасті передачі можуть вбудовуватися в конструкцію машини, або виділятися в самостійний вузол в окремому корпусі (редуктори, коробки передач, диференціали й ін.).

За конструктивним виконанням передачі можуть розташовуватися поза корпусом – **відкриті передачі**, або розміщатися в закритому корпусі – **закриті передачі**.

Зубчасті передачі можуть знижувати (редувати) або підвищувати (мультиплікувати) кутову швидкість (частоту обертання) веденого вала відносно кутової швидкості (частоти обертання) ведучого вала. Пристрої з передачами, які знижують кутову швидкість, називають **редукторами**, а з підвищувальними – **мультиплікаторами**.

### 1.3.1. Кінематичний аналіз зубчастих передач з нерухомими осями

Для кінематичного аналізу зубчастих передач необхідно зобразити на кресленні їх структурну схему. На рис. 1.9 представлені умовні зображення одноступінчастих зубчастих передач у площині, перпендикулярній їх площині руху.

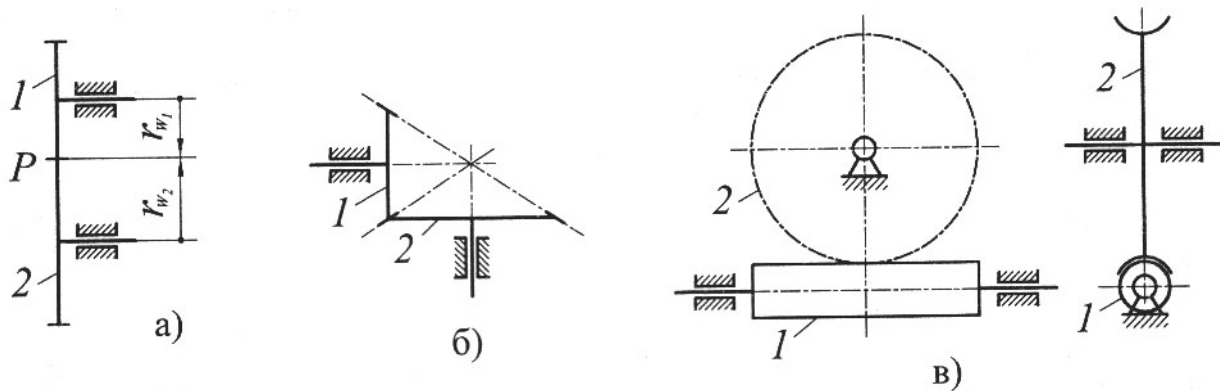


Рис. 1.9 – Умовні позначення одноступінчастих зубчастих передач:  
а) циліндрична, б) конічна, в) черв'ячна у двох проекціях

На рис. 1.9,а показаний триланковий механізм круглих зубчастих коліс зовнішнього зачеплення з радіусами  $r_{w1}$  й  $r_{w2}$ , які є радіусами центроїд у відносному русі ланок 1 і 2. Точку торкання коліс  $P$  називають **полюсом зачеплення**. Окружності з радіусами  $r_{w1}$  й  $r_{w2}$  у теорії зубчастого зачеплення називають **початковими окружностями**. Профілі зубів коліс підбирають таким чином, щоб їх загальна нормаль завжди проходила через точку  $P$  – **миттєвий центр обертання** у відносному русі коліс 1 і 2. У точці  $P$  початкові окружності обкатуються без ковзання.

$$\text{Отже, } \omega_1 \cdot r_{w1} = \pm \omega_2 \cdot r_{w2} \text{ або } \frac{\omega_1}{\omega_2} = \pm \frac{r_{w2}}{r_{w1}}.$$

Якщо крок між сусідніми зуб'ями по початковій окружності позначити через  $p_w$ , то вище представлені залежності можна записати в іншому вигляді

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \pm \frac{d_{w2}}{d_{w1}} = \pm \frac{\pi \cdot r_{w2}}{\pi \cdot r_{w1}} = \pm \frac{z_2 \cdot p_w}{z_1 \cdot p_w} = \pm \frac{z_2}{z_1} = \pm i_{12}, \quad (1.13)$$

де  $z_1, z_2$  – числа зубів коліс 1 і 2 відповідно;  $i_{12}$  – передаточне відношення від першого колеса до другого. Знак плюс відповідає внутрішньому, а знак мінус – зовнішньому зачепленню.

Відповідно (1.13) передаточне відношення прямо пропорційне відношенню кутових швидкостей (частот обертань) коліс і зворотно пропорційне відношенню чисел їх зубів

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2} = \pm \frac{z_2}{z_1} . \quad (1.14)$$

Тотожність (1.14) справедлива для всіх передач, відмінність становить лише те, що для конічних і гіперболоїдних передач відсутнє поняття знака, тому що колеса обертаються в різних площинах.

В одноступінчастих передачах у загальному машинобудуванні значення передаточного відношення рекомендується вибирати таким чином: у межах 1/6...6 у силових передачах; до 10-и в приладових пристроях (для одного ступіня зубчастої понижувальної передачі середнє значення передаточного відношення можна прийняти  $i_{12cp} = 2 \dots 6$ , для черв'ячної передачі –  $i_{12cp} = 8 \dots 80$ ).

На практиці часто виникає необхідність відтворення значних передаточних відношень. Для цього застосовують **багатоступінчасті передачі**, отримані шляхом послідовного з'єднання одноступінчастих передач. На рис. 1.10,а представлена схема багатоступінчастої передачі, складеної із циліндричних зубчастих коліс.

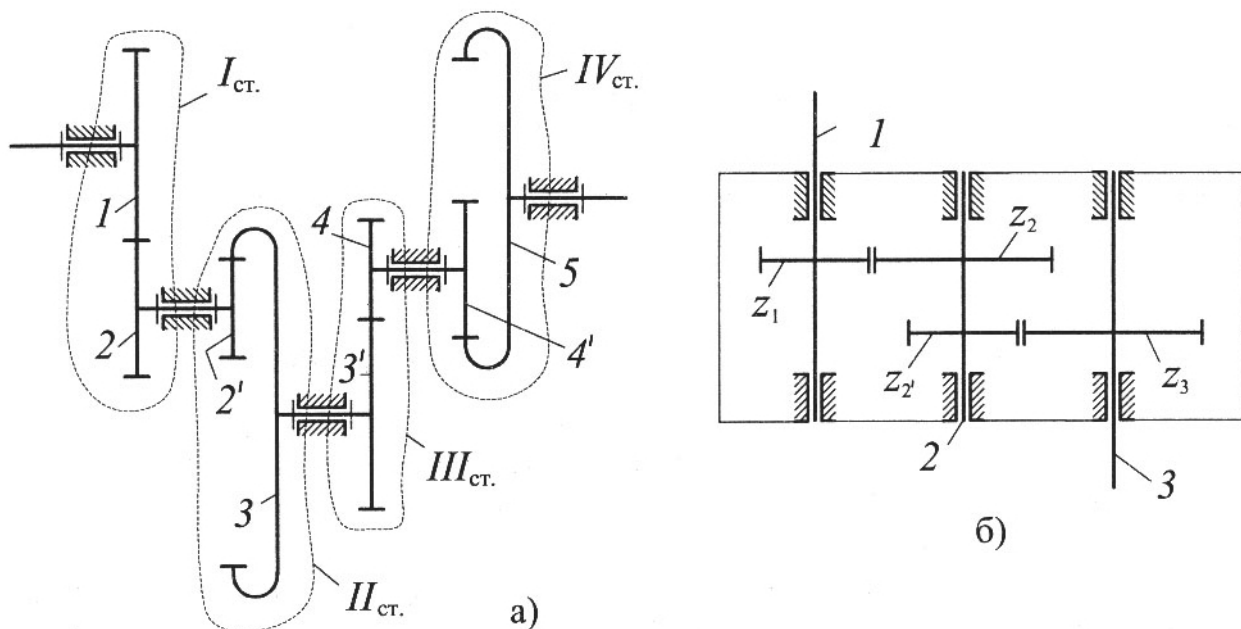


Рис. 1.10 – Багатоступінчаста зубчаста передача – а),  
зубчастий двоступінчастий циліндричний редуктор – б)

Передача складається із чотирьох ступенів: I, III – ступені із зовнішніми й II, IV – із внутрішніми зачепленнями. Потрібно визначити передаточне відношення від першого колеса до п'ятого –  $i_{15}$ . Відповідно до виразу (1.14) запишемо:

$$i_{12} = -\frac{z_2}{z_1} = \frac{\omega_1}{\omega_2}; \quad i_{2'3} = \frac{z_3}{z_{2'}} = \frac{\omega_2}{\omega_3}; \quad i_{3'4} = -\frac{z_4}{z_{3'}} = \frac{\omega_3}{\omega_4}; \quad i_{4'5} = \frac{z_5}{z_{4'}} = \frac{\omega_4}{\omega_5}.$$

Перемноживши ліві й праві частини останніх рівнянь, одержимо

$$i_{12} \cdot i_{2'3} \cdot i_{3'4} \cdot i_{4'5} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \cdot \frac{\omega_2}{\omega_3} \cdot \frac{\omega_3}{\omega_4} \cdot \frac{\omega_4}{\omega_5} = (-1)^2 \cdot \frac{z_2}{z_1} \cdot \frac{z_3}{z_{2'}} \cdot \frac{z_4}{z_{3'}} \cdot \frac{z_5}{z_{4'}} = \frac{\omega_1}{\omega_5} = i_{15}. \quad (1.15)$$

У виразі (1.15) ступінь «2» відповідає числу зовнішніх зачеплень. Отже, знак загального передаточного відношення багатоступінчастої передачі залежить від кількості зовнішніх зачеплень, що входять у передачу.

На підставі отриманої залежності виводимо, що **загальне передаточне відношення багатоступінчастої зубчастої передачі визначається як добуток передаточних відношень її окремих ступенів**

$$i_{об} = i_{1n} = \prod_{k=1}^a i_k, \quad (1.16)$$

де індекс 1 – номер вхідної ланки (колеса) передачі,  $n$  – номер вихідної її ланки (колеса),  $k$  – номер ступеня,  $a$  – число ступенів у передачі.

Якщо в ланок 2 і 4 (див. рис. 1.10,а) числа зубів  $z_2 = z_2'$  і  $z_4 = z_4'$ , то їх наявність у механізмі не впливає на величину передаточного відношення, а впливає тільки на його знак. Такі колеса називають «паразитними».

### 1.3.2. Епіциклічні передачі

Епіциклічні передачі з одним ступенем рухливості називають **планетарними**, а із двома й більше ступенями вільності – **диференціальними**. На рис. 1.11 наведена схема епіциклічної передачі у двох проекціях.

Колеса 2 із рухомими осями називають *планетарними або сателітами*, ланка  $H$ , на якій розташовуються осі сателітів – *води́ло*, колеса 1 і 3 із нерухомими осями обертання – *центрально́ні*. Число сателітів на кінематику механізму не впливає, більше одного їх установлюють для динамічного зрівноважування механізму й рівномірного розподілу навантажень на колеса 1 і 3.

Число ступенів вільності представленого механізму, відповідно до формули Чебишева, дорівнює  $W = 3n - 2p_1 - p_2 = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 4 - 2 = 2$ . Отже, даний механізм диференціальний. Позначимо кутові швидкості ланок відповідно через  $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_H$ . Будемо *обертати механізм*, при цьому мислено додамо всім його ланкам кутову швидкість  $\omega_H$ , але в протилежному їй напрямку. Тоді водило стає умовно нерухомим, а диференціальний механізм перетворюється в звичайну двоступінчасту передачу (ступені 1-2 і 2-3) з

нерухомими осями обертання коліс. Цей прийом називається **методом обернення** (інверсії) **руху**.

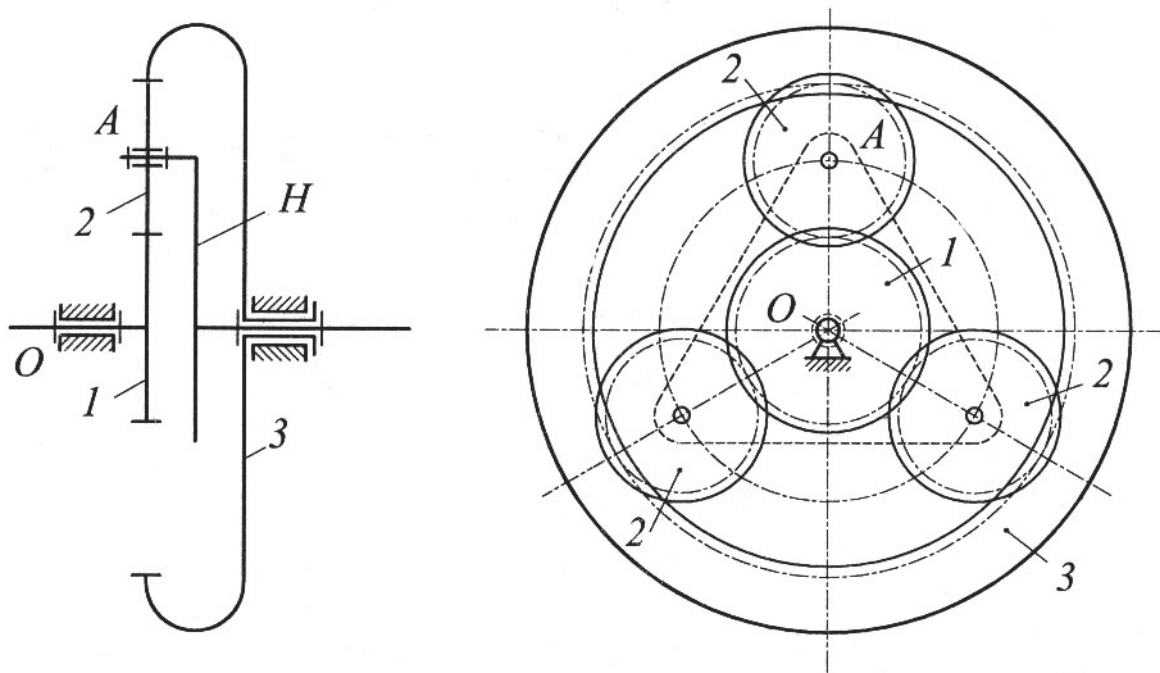


Рис. 1.11 – Схема епіциклічної передачі

Кутові швидкості зубчастих коліс *оберненого механізму* будуть рівні:  $\tilde{\omega}_1 = \omega_1 - \omega_H$ ,  $\tilde{\omega}_2 = \omega_2 - \omega_H$ ,  $\tilde{\omega}_3 = \omega_3 - \omega_H$ ,  $\tilde{\omega}_H = 0$ .

Згідно (2.15) запишемо  $i_{13}'' = \tilde{\omega}_1 / \tilde{\omega}_3$ , або

$$i_{13}'' = \frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_3 - \omega_H} = i_{12}'' \cdot i_{23}'' = -\frac{z_2}{z_1} \cdot \frac{z_3}{z_2} = -\frac{z_3}{z_1}. \quad (1.17)$$

У теорії кінематики епіциклічних механізмів прийнято, що показник степеня в позначенні передаточного відношення відповідає номеру (позначенню) ланки, прийнятої за нерухою. Оскільки в досліджуваного механізму  $W=2$ , виходить, що в ньому повинні бути дві вхідні ланки, наприклад,  $1$  і  $3$ ,  $1$  і  $H$ , або  $3$  і  $H$ . Якщо кутові швидкості цих ланок задані, то за допомогою виразу (1.17) можна визначити кутову швидкість вихідної ланки, відповідно  $\omega_H$ ,  $\omega_3$ , або  $\omega_1$ .

Якщо кутова швидкість одної із вхідних ланок, наприклад  $\omega_3$ , дорівнює нулю, то диференціальний механізм перетворюється в планетарний. Тоді на підставі (1.17) одержимо  $i_{13}^H = \frac{\omega_1 - \omega_H}{0 - \omega_H} = 1 - \frac{\omega_1}{\omega_H} = 1 - i_{1H}^3$ . Звідси передаточне

відношення від колеса  $1$  до водила  $H$  при нерухомому колесі  $3$

$$i_{1H}^3 = 1 - i_{13}^H. \quad (1.18)$$

Вираз (1.18) називають **формулою Віллеса**, і вона справедлива для інших типів планетарних передач (рис. 1.12).

Відзначимо наступну особливість передаточного відношення від ланки  $n$  до ланки  $m$  будь-якого типу зубчастих механізмів  $i_{nm} = \frac{\omega_n}{\omega_m} = \frac{1}{\omega_m/\omega_n} = \frac{1}{i_{mn}}$ , або  $i_{nm} \cdot i_{mn} = 1$ , тобто передаточні відношення  $i_{nm}$  і  $i_{mn}$  є оберненими числами.

Задане передаточне відношення можна одержати, використовуючи різні схеми механізмів, які відрізняються за габаритами, масою, ККД і ін. (рис. 1.12).

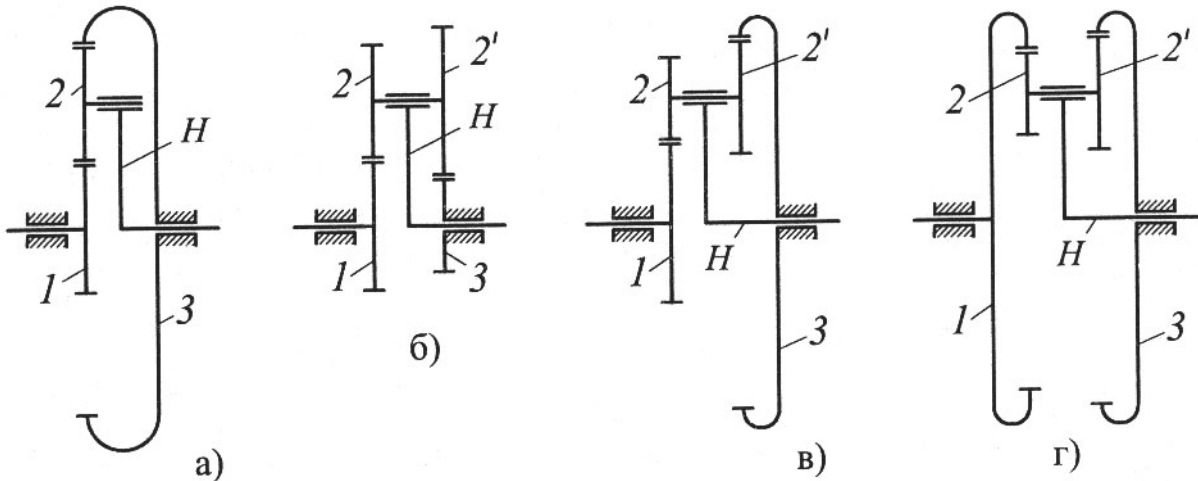


Рис. 1.12 – Схеми найпростіших планетарних передач

### 1.3.3. Геометрія евольвентних зачеплень

**Основна теорема плоского зачеплення.** Зачеплення, у якому обидві ланки відтворюють рух, паралельний одній й тій же нерухомій площині, називають **плоским**. У плоскому зачепленні замість сполучених поверхонь можна розглядати сполучені профілі (криві), отримані шляхом перетину зазначених поверхонь площиною, паралельною площині руху (рис. 1.13).

Нормаль  $n-n$  у точці контакту  $P$  – **полюсі зачеплення** сполучених поверхонь ділить лінії центрів внутрішнім (рис. 1.13,а) або зовнішнім (рис. 1.13,б) чином. Відповідно до **теорему Кеннеді** про три миттєвих центри швидкостей, точка  $P$  є миттєвим центром швидкостей у відносному русі ланок 1 і 2. Отже, відносно точки  $P$  справедлива рівність

$$\omega_1 \cdot l_{O_1P} = \omega_2 \cdot l_{O_2P}, \text{ або } \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{l_{O_2P}}{l_{O_1P}} = i_{12}, \quad (1.19)$$

де **передаточне відношення** в плоскому русі вважають додатним при однаковому напрямку векторів  $\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2$  (рис. 1.13,б) і від'ємним – при їх різних напрямках (рис. 1.13,а). При від'ємному значенні  $i_{12}$  передачу називають **зовнішньою**, а при додатному – **внутрішньою**.



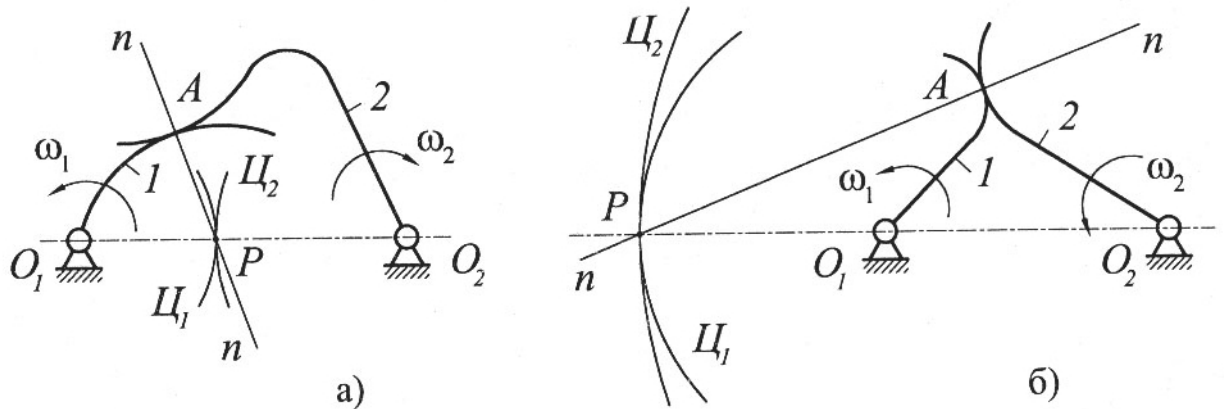


Рис. 1.13 – Картини плоских зачеплень

На підставі (1.19) передаточне відношення повною мірою визначається виразом (1.13).

Геометричні місця точок дотику ланок 1 і 2 при їх русі збігаються з точкою  $P$ , утворюючи **центроїди**  $\zeta_1$  і  $\zeta_2$  у відносному русі. Якщо  $i_{12} = \text{const}$ , то точка  $P$  займає постійне положення на лінії центрів  $O_1O_2$  і центроїди  $\zeta_1$ ,  $\zeta_2$  стають колами з радіусами  $O_1P$  і  $O_2P$  відповідно. За властивістю центроїд ці кола перекочуються без ковзання.

У теорії зубчастого зачеплення центроїди  $\zeta_1$  і  $\zeta_2$  називають **початковими колами**, і їх діаметри позначають буквами  $d_{w1}$  й  $d_{w2}$ .

Механізми передач в основному використовують для одержання сталого передаточного відношення, що визначає вибір форми для профілів зубів. Цій умові задовольняють багато різновидів кривих. Для забезпечення високого ККД, міцності й довговічності коліс профілі повинні забезпечувати малі швидкості ковзання й достатні радіуси кривизни в точках їх контакту. Профілі повинні допускати легке виготовлення, зокрема, нарізування простим інструментом незалежно від числа зубів коліс. Цим умовам найбільш повно задовольняє **евольвентне зачеплення**, яке знайшло широке застосування в машинобудуванні.

**Евольвента окружності** є крива, центри кривизни якої лежать на колі. Евольвента кола може бути отримана шляхом перекочування прямої по колу без ковзання. У теорії зачеплення такі кола називають **основними**, і їх діаметри позначають  $d_{bi}$  ( $i = 1; 2$  – номер зубчастого колеса).

Основні властивості евольвенти:

- 1) вигляд евольвенти визначається радіусом основного кола й положенням початку відліку евольвентного кута;
- 2) евольвента не має точок усередині основного кола;
- 3) нормаль у точці евольвенти є дотичною до основного кола;
- 4) центри радіусів кривизни евольвенти лежать у точках дотику нормалей з основним колом.

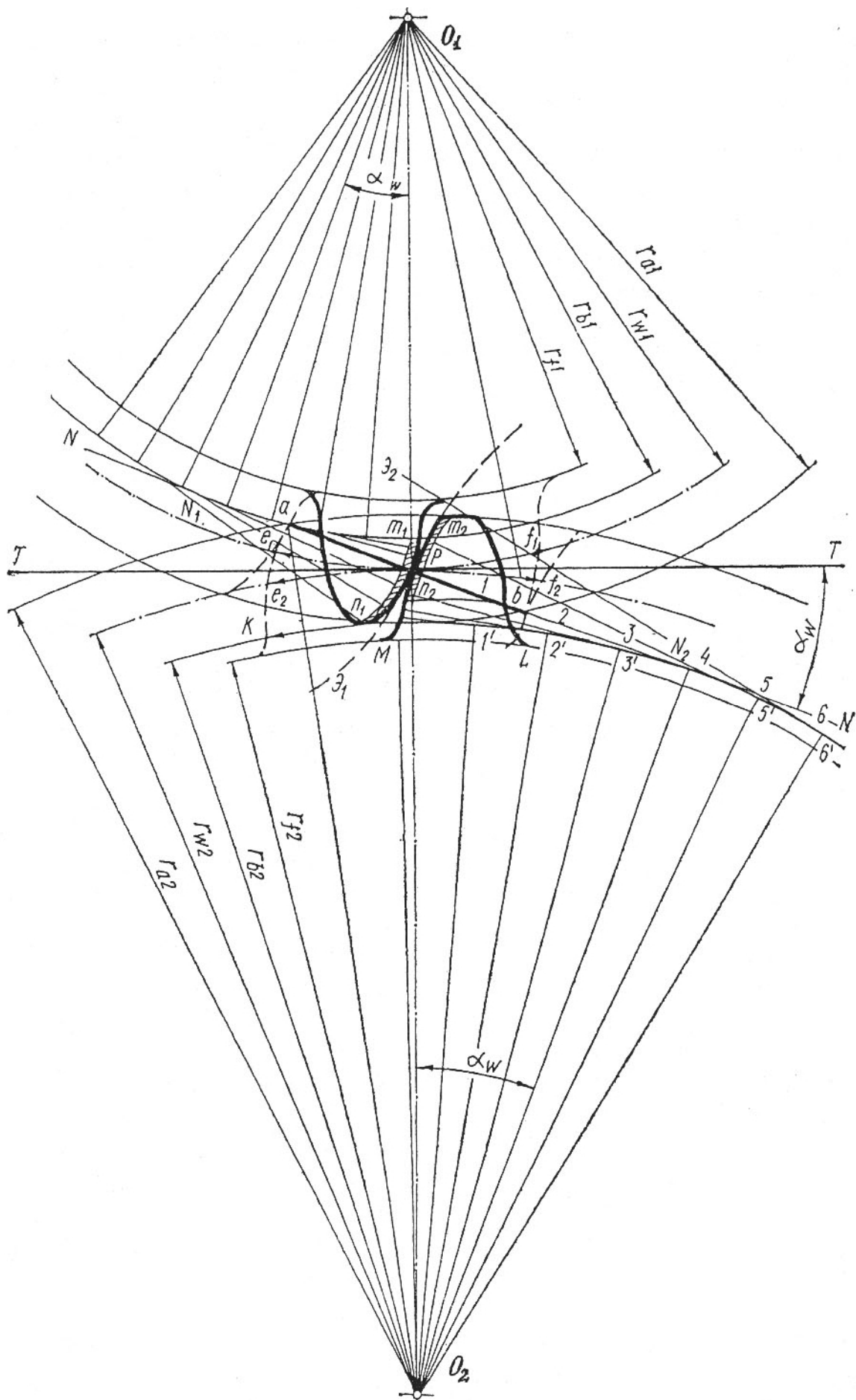


Рис. 1.14 – Картина зовнішнього евольвентного зачеплення

На рис. 1.14 наведена картина зовнішнього евольвентного зачеплення. Евольвенти зубів цих коліс  $\mathcal{E}_1$  і  $\mathcal{E}_2$  отримані шляхом розгортання основних кіл із радіусами  $r_{b1}$ ,  $r_{b2}$ . Початкові кола з радіусами  $r_{w1}$  й  $r_{w2}$  стикаються в полюсі зачеплення  $P$ .

Відстань між двома однойменними точками двох сусідніх зубів, обмірювану по будь-якому колу, називають **окружним кроком**. Якщо крок вимірюють по початковому колу, то його називають **початковим окружним кроком** зубів зубчастого колеса

$$p_w = s_w + s_e, \quad (1.20)$$

де  $s_w$  – товщина зуба по початковому колу,  $s_e$  – ширина западини по початковому колу.

Довжина початкових кіл

$$2 \cdot \pi \cdot r_{w1} = z_1 \cdot p_w; \quad 2 \cdot \pi \cdot r_{w2} = z_2 \cdot p_w. \quad (1.21)$$

Оскільки початкові кола зачеплених коліс обкатуються без ковзання, то їх кроки по цих колах повинні бути рівні. Відношення

$$m_w = p_w / \pi \quad (1.22)$$

називають **модулем зубів**.

Через модуль виражають усі основні геометричні розміри зубчастих коліс. Від значення модуля залежать форми й розміри зуборізних інструментів, які використовують при виготовленні зубчастих коліс. Для зменшення асортиментів зуборізних інструментів на підприємствах, значення модулів стандартизовані (ДСТУ 9563-60).

Коло зубчастого колеса, для якого модуль має стандартне значення  $m$ , називають **ділильним**. Діаметри ділильних кіл позначають  $d_i$  ( $i=1; 2$  – номер зубчастого колеса),  $d_i = m \cdot z_i$ . Ділильне коло ділить зуб на дві частини: **головку** й **ніжку**. Головки зубів обмежуються **колами вершин** із радіусами  $r_{a1}$ ,  $r_{a2}$ , а ніжки зубів – **колами западин** з радіусами  $r_{f1}$ ,  $r_{f2}$ . Різницю  $h = r_{a1} - r_{f1} = r_{a2} - r_{f2}$  називають **висотою зуба**. Якщо висоту головки зуба позначити  $h_a$ , а висоту ніжки –  $h_f$ , то одержимо  $h = r_a - r_f = h_a + h_f$ .

Якщо ділильне й початкове кола зубчастого колеса однакові (збігаються)  $d = d_w$ , то таке колесо називають **нормальним** або **нульовим**. Для нормальних зубчастих коліс

$$s_w = s_e = p_w / 2. \quad (1.23)$$

Основні геометричні розміри зубчастих коліс визначаються залежно від модуля й чисел зубів коліс. Відповідно до Держстандарту приймають  $h_a = m$ ;  $h_f = 1,25m$ . Тоді діаметри кіл вершин

$$d_{ai} = d_{wi} + 2 \cdot m = \frac{\pi \cdot d_{wi}}{\pi} + 2 \cdot m = \frac{p_w \cdot z_i}{\pi} + 2 \cdot m = m \cdot (z_i + 2), \quad (1.24)$$

а діаметри кіл западин

$$d_{f_i} = d_{w_i} - 2,5 \cdot m = m \cdot (z_i - 2,5) . \quad (1.25)$$

Із трикутників  $O_1PN_1$  і  $O_2PN_2$  визначимо діаметри основних кіл

$$d_{bi} = d_{w_i} \cdot \cos \alpha_w , \quad (1.26)$$

де  $\alpha_w$  – це кут між нормаллю до евольвентних профілів, проведеною через точку їх дотику (полнос зачеплення) і дотичною до початкових кіл. Цей кут називається **кутом зачеплення**.

В евольвентному зачепленні геометричне місце точок контакту (полюсів зачеплення) зубів здійснюється по загальній нормалі до їх профілів (рис. 1.14), тому цю нормаль називають **лінією зачеплення**. Відрізок  $N_1N_2$  загальної нормалі  $NN$ , укладений між точками її дотику з основними колами, називають **теоретичною лінією зачеплення**. Відрізок  $ab$  теоретичної лінії зачеплення, укладений між точками перетинання цієї лінії з колами вершин, називають **практичною лінією зачеплення**.

**Коефіцієнт перекриття зубчастої передачі.** Безперервність роботи зубчастої передачі повинна забезпечуватися перекриттям зачеплення однієї пари зубів іншою. Чим більше число таких пар, тим плавніше буде працювати зубчаста передача, а також при цьому зменшуються навантаження на зуби.

Плавність роботи зубчастої передачі характеризується **коефіцієнтом перекриття**  $\varepsilon_\alpha$  – це відношення дуги зачеплення до кроку, узятих по початковому колу

$$\varepsilon_\alpha = (ef) / p_w . \quad (1.27)$$

Неважко переконатися, що дуга зачеплення  $(ef) = (ab) / \cos \alpha$ , де  $\alpha$  – **кут профілю зуба** інструментальної рейки ( $\alpha = 20^\circ$ ) див. рис. 19,а. Тоді

$$\varepsilon_\alpha = \frac{(ab)}{p_w \cos \alpha} = \frac{(ab)}{p_b} , \quad (1.28)$$

де  $p_b$  – крок зубчастого колеса по основному колу.

Для безперервності роботи передачі повинна виконуватися умова  $\varepsilon_\alpha \geq 1,1$ .

#### 1.3.4. Косозубі передачі.

Для збільшення коефіцієнта перекриття й зниження чутливості зубів до погрішностей виготовлення й монтажу застосовують косозубі зубчасті передачі, складені з косозубих коліс. Бічна поверхня косого зуба косозубого колеса утворюється прямою  $AB$ , розташованою в площині  $Q$  (рис. 1.15,а).

Площина  $Q$  обкатується по основному циліндру з радіусом основи  $r_b$  без ковзання. Пряма  $AB$  з утворюючою основного циліндра складає кут  $\beta_b$ . При обкатуванні площини  $Q$  кожна точка прямої  $AB$  описує евольвенту, а сама пряма  $AB$  – поверхню (**гелікоїд, що розгортається**). Поперечні перерізи гелікоїда є евольвентами з основами, розташованими на гвинтовій лінії  $A_0B_0$ . У процесі зачеплення косозубих циліндричних коліс відбувається дотик по загальній утворюючій двох гелікоїдів, які взаємообгинають один одного. При

цьому лінія дотику гелікоїдів розташована на загальній дотичній площині до основних циліндрів.

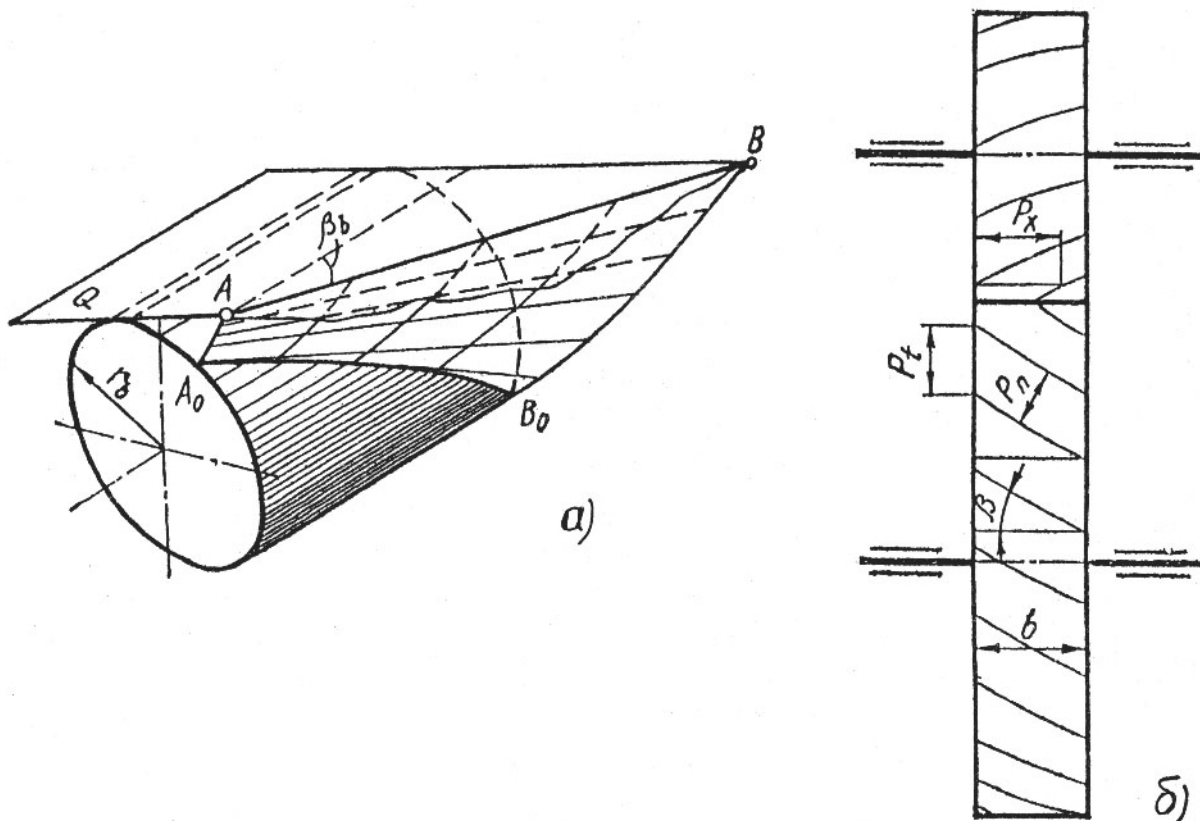


Рис. 1.15 – Косозуба зубчаста передача:  
утворення бічної поверхні зуба – а), схематичне зображення – б)

Коефіцієнт перекриття косозубої передачі

$$\varepsilon_v = \varepsilon_\alpha + \frac{b}{p_t} \operatorname{tg} \beta, \quad (1.29)$$

де  $\varepsilon_\alpha$  – коефіцієнт перекриття в торцевій площині передачі,  $b$  – ширина зубчастого колеса (рис. 1.15,б),  $p_t$  – крок, вимірюваний у торцевій площині, який називається **окружним**,  $\beta$  – **кут нахилу зуба** по початковому циліндру.

У косозубих зубчастих передачах розрізняють три кроки, вимірювані по початковому циліндру (див. рис. 1.15,б), і три модулі, що відповідають їм. Зазначеному вище окружному кроку  $p_t$  відповідає **окружний модуль**  $m_t$ . Крок  $p_n$ , вимірюваний у площині, нормальній до бічної поверхні зуба, називають **нормальним**; йому відповідає **нормальний модуль**  $m_n$ . **Осьовий** крок  $p_x$  вимірюється в напрямку утворюючої початкового циліндра; йому відповідає **осьовий модуль**  $m_x$ . Між кроками й, відповідно, між модулями існують наступні залежності:

$$p_t = \frac{p_n}{\cos\beta} = \frac{p_x}{\operatorname{ctg}\beta}; \quad m_t = \frac{m_n}{\cos\beta} = \frac{m_x}{\operatorname{ctg}\beta}. \quad (1.30)$$

Кут зачеплення  $\alpha_t$  в торцевому перетині відрізняється від кута зачеплення в нормальному перетині  $\alpha_n = 20^\circ$  (для нормальних коліс). Взаємозв'язок між цими кутами має вигляд

$$\operatorname{tg}\alpha_n = \operatorname{tg}\alpha_t \cos\beta. \quad (1.31)$$

Одним з недоліків косозубих передач є виникнення в процесі роботи осьових зусиль, які діють на зуби коліс, а відповідно, і на опори валів коліс.

### 1.3.5. Кінематика виготовлення сполучених поверхонь зубів циліндричних евольвентних зубчастих коліс

Різальний інструмент для нарізування зубів виконується у вигляді зубчастого колеса з ріжучими гранями на зубах або у вигляді зубчастої рейки, яка має ріжучі грані. У першому випадку інструмент називають **довбачом**, а в другому випадку це може бути **гребінка** (інструментальна рейка), **різцева головка** або **черв'ячна фреза**. Для нарізування евольвентних зубів зубчастих коліс найбільше поширення одержав рейковий інструмент, тому що профіль зуба рейки прямолінійний і легко виготовляється. Довбач застосовують звичайно для нарізування зубів зубчастих коліс із внутрішніми зубами (рис. 1.8,г).

Для нормального зачеплення ( $\alpha_w = \alpha = 20^\circ$ ) мінімальне число зубів зубчастого колеса становить  $z_{\min} = 17$ . При числах зубів малих зубчастих коліс (**шестерень**), які дорівнюють і більше  $z_{\min}$ , заклинювання відсутнє при будь-яких числах зубів більших зубчастих коліс. Якщо ж число зубів зубчастого колеса менше  $z_{\min}$ , то для запобігання підрізу треба відповідним чином розташовувати інструментальну рейку відносно заготовки.

### 1.3.6. Конічні зубчасті передачі

Конічні передачі призначені для передачі й перетворення обертального руху між пересічними осями. Як було сказано вище, для забезпечення більшої плавності роботи зубчасті колеса цих передач можуть бути виконані як із прямими зубами (рис. 1.16,а), так і із зубами інших форм: з косими (рис. 1.16,б), із круговими (рис. 1.16,в), зі спіральними, з евольвентними й ін.

Позначимо через  $\delta$  гострий кут між осями обертання зубчастих коліс 1 і 2, що перетинаються в точці  $O$  (рис. 1.17). Залежно від напрямку обертання цих коліс можуть бути два випадки. Перший випадок (рис. 1.17,а) – вектори кутових швидкостей  $\vec{\omega}_1$  і  $\vec{\omega}_2$  утворюють тупий кут  $(\pi - \delta)$ , другий випадок (рис. 1.17,б) – вектори швидкостей утворюють гострий кут  $\delta$ . В обох випадках відносний рух ланок – зубчастих коліс 1 і 2 – у кожному мить може розглядатися як обертання цих коліс навколо миттєвої осі обертання  $OP$ , яка складає з осями обертання кожного колеса кути  $\delta_1$  і  $\delta_2$ .

Положення миттєвої осі обертання визначається з умови, що у відносному русі швидкість будь-якої точки цієї прямої (наприклад, точки  $P$ ) дорівнює нулю.

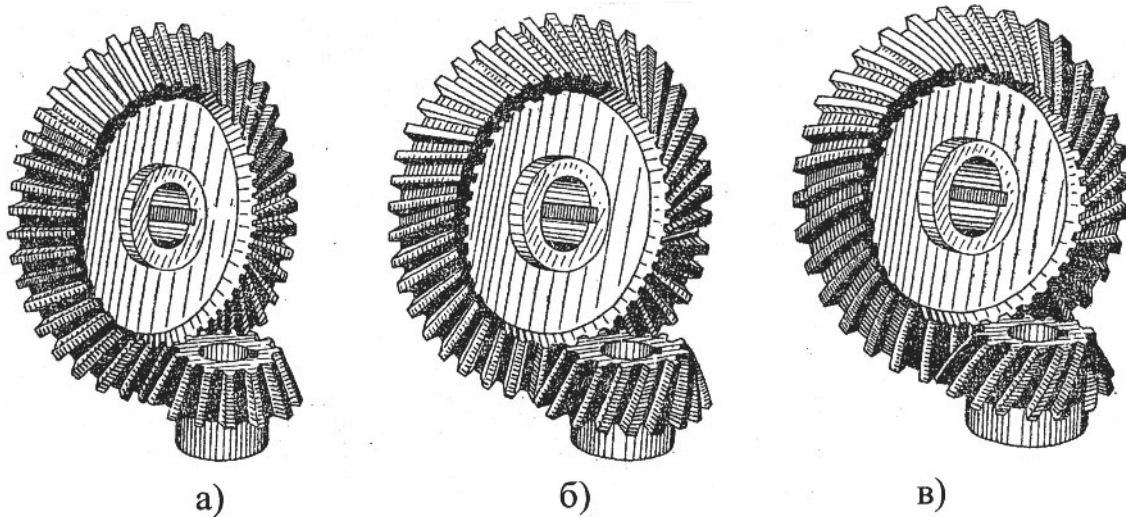


Рис. 1.16 – Різновиди конічних передач

Отже, абсолютні швидкості точок  $P_1$  і  $P_2$  ланок 1 і 2 рівні між собою  $\bar{V}_{P_1} = \bar{V}_{P_2}$  або  $\omega_1 \cdot l_{OP} \cdot \sin \delta_1 = \omega_2 \cdot l_{OP} \cdot \sin \delta_2$ . Звідси передаточне відношення конічної передачі

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\sin \delta_2}{\sin \delta_1}. \quad (1.32)$$

Відзначимо, що кути  $\delta_1$  і  $\delta_2$  зв'язані залежністю

$$\delta_1 \pm \delta_2 = \delta, \quad (1.33)$$

де знак мінус відносять до другого випадку (рис. 23,б).

Вирішуючи спільно рівняння (1.32) і (1.33), одержимо

$$\operatorname{ctg} \delta_1 = \frac{(i_{12} \pm \cos \delta)}{\sin \delta}. \quad (1.34)$$

Передаточне відношення конічної передачі можна також визначити через числа зубів її коліс, а з урахуванням того, що в ортогональних конічних передачах  $\delta = 90^\circ$ , на підставі (1.32) отримаємо

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{z_2}{z_1} = \frac{1}{\operatorname{tg} \delta_1} = \operatorname{tg} \delta_2. \quad (1.35)$$

При  $i_{12} = \operatorname{const}$  кути  $\delta_1$  і  $\delta_2$  залишаються постійними й послідовні положення миттєвої осі  $OP$  при обертанні відносно осей обертання ланок 1 і 2

утворюють **аксоїди** (геометричне місце миттєвих осей обертання) у вигляді кругових конічних поверхонь, які називаються **початковими конусами**.

Коло перетинання зовнішньої (стосовно центра сфери  $O$ ) торцевої поверхні зуба з ділильним конусом називають **ділильним колом**, що лежить у площині, перпендикулярній осі обертання колеса. Радіус цього кола виражається через стандартний модуль  $m$ . З рис. 24,а випливає, що

$$r_1 = l_{O_1P} = 0,5 \cdot m \cdot z_1, \quad r_2 = l_{O_2P} = 0,5 \cdot m \cdot z_2, \quad (1.36)$$

а товщина зуба по ділильній окружності  $s = 0,5 \cdot \pi \cdot m$ .

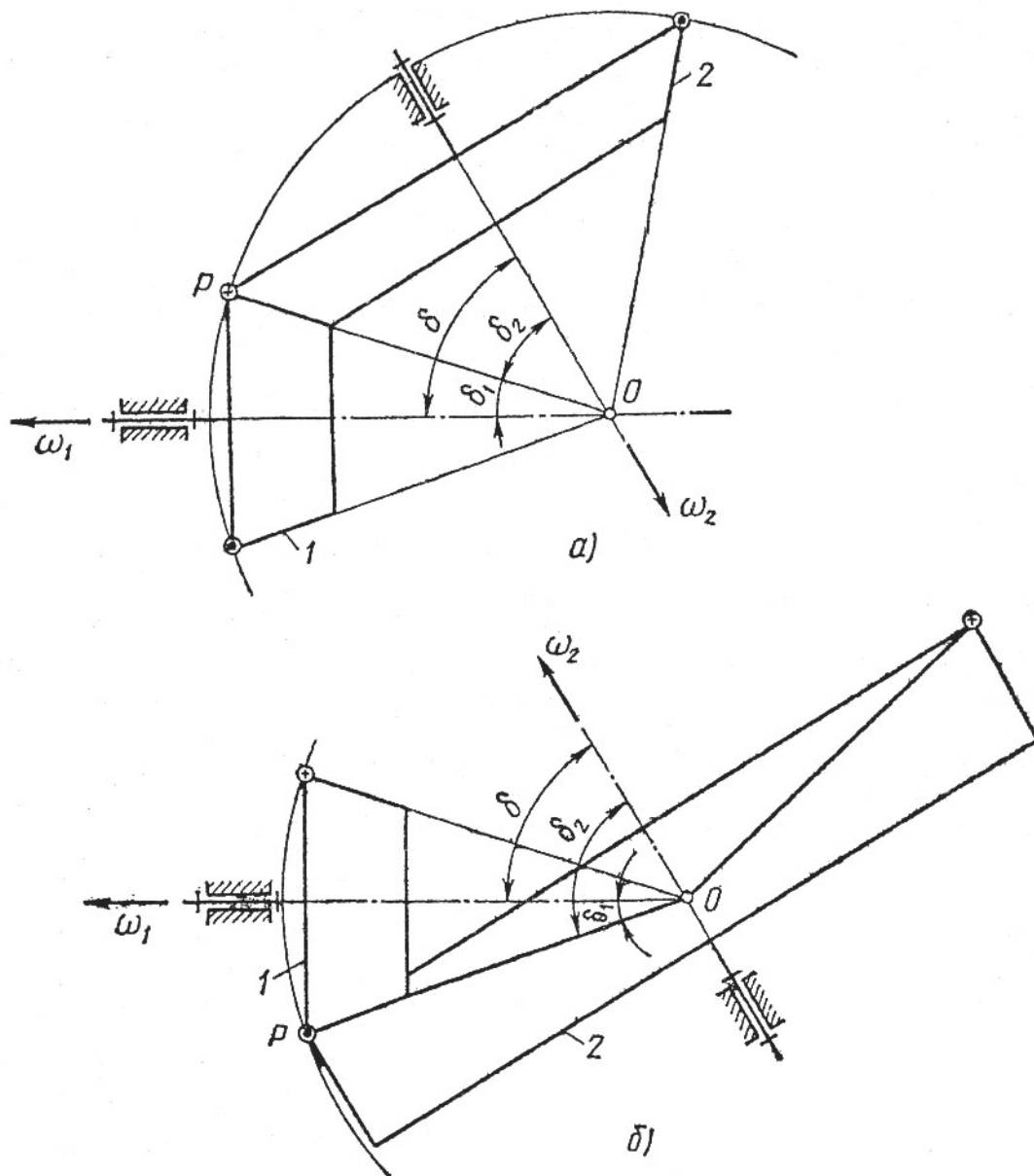


Рис. 1.17 – Структурні схеми конічних передач:  
зовнішньої – а) і внутрішньої – б)



Висоту головки зуба  $h_a$  і висоту ніжки зуба  $h_f$  вимірюють по утворюючих додаткового конуса й приймають рівними  $h_a = m$ ,  $h_f = 1,2 \cdot m$ . Ширина колеса  $b = (4 \dots 12) \cdot m$ .

### 1.3.7. Гіперболоїдні передачі

У зубчастих передачах з перехресними осями обертання відносний рух ланок для даної миті можна представити як їх обертання навколо миттєвої осі й ковзання вздовж неї.

Таку вісь називають **миттєвою гвинтовою віссю**. Геометричні місця такої осі на кожному з коліс дають **гвинтові аксоїди відносного руху**. При постійному передаточному відношенні миттєва гвинтова вісь займає постійне положення в просторі. У такому випадку гвинтові аксоїди відносного руху є **однополюсними гіперболоїдами обертання** (рис. 1.18,а).

Для визначення передаточного відношення в гіперболоїдних передачах справедлива формула (1.32). Перепишемо її,

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\sin \delta_2}{\sin \delta_1},$$

оскільки в ній  $\delta_1$  і  $\delta_2$  – кути, утворені осями  $O_1$  і  $O_2$  гіперболоїдів 1 і 2 (див. рис. 1.18,а) з миттєвою гвинтовою віссю  $OP$ . Якщо кутові швидкості постійні, то постійними будуть кути  $\delta_1$  і  $\delta_2$ .

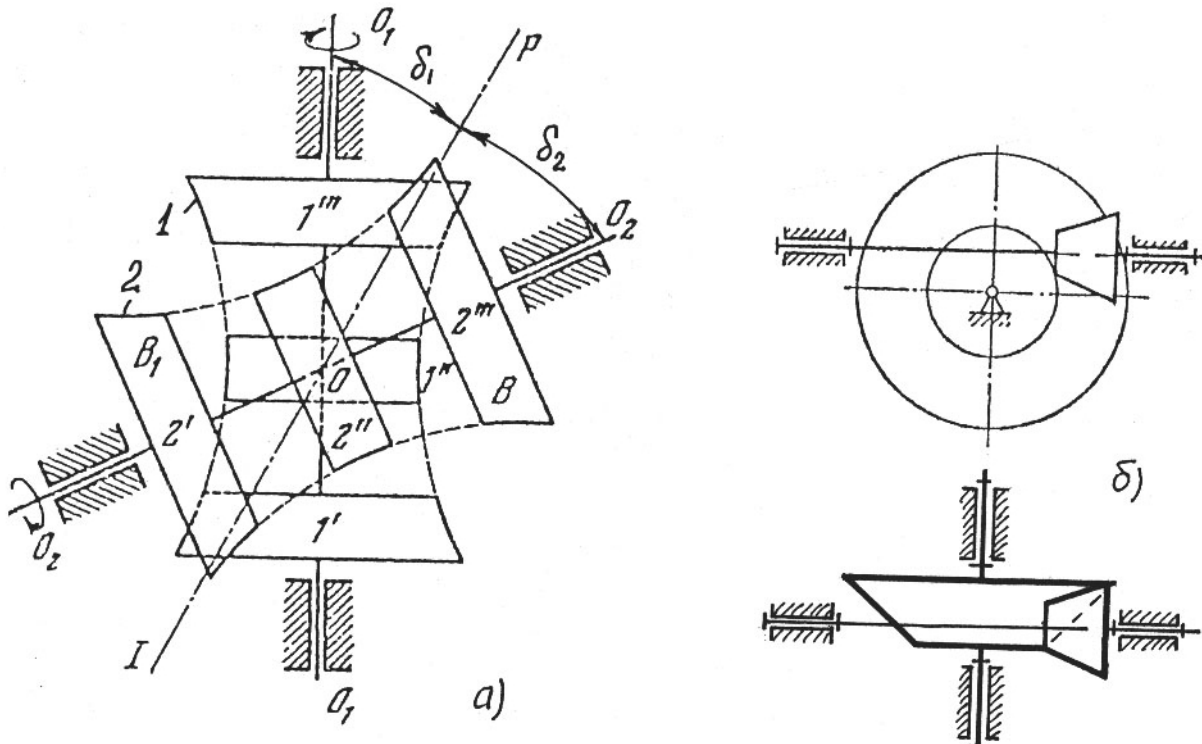


Рис. 1.18 – Схеми: передача з гіперболоїдами обертання – а) і гіпоїдна передача – б).

Таким чином, передача обертання між перехресними осями може бути завжди здійснена **гіперболоїдними колесами**, які являють собою частини  $1'$  і  $2'$  або  $1''$  і  $2''$  або  $1'''$  і  $2'''$  гіперболоїдів обертання  $1$  і  $2$ . Передачу із частинами гіперболоїдів  $1''$  і  $2''$ , близькими до циліндричних поверхонь, називають **гвинтовою передачею** (рис. 1.8,в). У гвинтових передачах контакт зубів точковий. Гіперболоїдну передачу із частинами гіперболоїдів  $1'$  і  $2'$  або  $1'''$  і  $2'''$  називають **гіпоїдною передачею** (рис. 1.18,б); у неї гіперболічні поверхні можна з великою точністю наближення замінити конічними поверхнями.

Лінійний контакт зубів виходить у гіперболоїдній передачі, у якій початкові (ділильні) поверхні відмінні від конічних і мале колесо (шестерня) має гвинтові зуби. Такі передачі називають **черв'ячними**. Мале колесо в них називають **черв'яком**, а велике – **черв'ячним колесом**.

Зачеплення в черв'ячній передачі повністю визначають прийнятою формою черв'яка й розмірами його зубів. Ведучою ланкою в черв'ячній передачі, як правило, є черв'як (особливо в силових передачах). У приладових пристроях ведучим може бути черв'ячне колесо (наприклад, диск номеронабирача в цифрових телефонних апаратах). Для зменшення зносу третьових поверхонь зубів колеса й витків черв'яка зубчастий вінець черв'ячного колеса (частина колеса у вигляді ободу, який містить зуби) виконують увігнутим, охоплюючим черв'як (рис. 1.8,б).

У більшості випадків у практиці застосовують черв'ячні передачі з **архімедовими й евольвентними черв'яками**. Архімедова гвинтова поверхня виходить тоді, коли утворююча цієї поверхні перетинає й гвинтову лінію, і вісь черв'яка, і утворює з віссю постійний кут (рис. 1.19,в).

Перетин цієї поверхні площиною, перпендикулярною осі обертання черв'яка, дає **архімедову спіраль**. Якщо утворююча пряма в будь-якому положенні залишається дотичною до гвинтової лінії, то виходить евольвентна гвинтова поверхня (рис. 1.19,г). Перетин цієї поверхні площиною, перпендикулярною осі обертання черв'яка, дає **евольвенту**.

Черв'яки бувають також **однозахідними й багатозахідними**. В однозахідному черв'яку (рис. 1.19,а) крок гвинтової лінії по ділильному колу називають **ходом зуба** й позначають через  $p_z$ . У багатозахідному черв'яку (рис. 1.19,б) крім ходу зуба розрізняють також **осьовий крок  $p_x$** , тобто відстань між однаковими точками сусідніх гвинтових зубів по ділильному колу.

Хід зуба й осьовий крок взаємозалежні

$$p_z = p_x z_1, \quad (1.37)$$

де  $z_1$  – число зубів (заходів) черв'яка.

Нарешті, за формою ділильної поверхні черв'яки підрозділяються на **циліндричні й тороїдні** (глобоїдні). У тороїдних черв'яках (рис. 26,д) ділильна поверхня є тор, тобто поверхня, утворена обертанням дуги кола навколо осі, паралельній хорді дуги. Такі черв'яки мають більш сприятливі умови змащення.

Передаточне відношення черв'ячної передачі також визначають виразом (1.14) без урахування знака  $i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{z_2}{z_1}$ , де  $z_2$  – число зубів черв'ячного

колеса. У цих передачах передаточне відношення може досягати досить великих значень внаслідок малого числа зубів черв'яка. Передача виходить компактною, але ККД порівняно невеликий. Слід зазначити, що при однозахідному черв'яку рух у черв'ячній передачі необоротний, тобто передача руху від черв'ячного колеса до черв'яка неможлива (**явище самогальмування**).

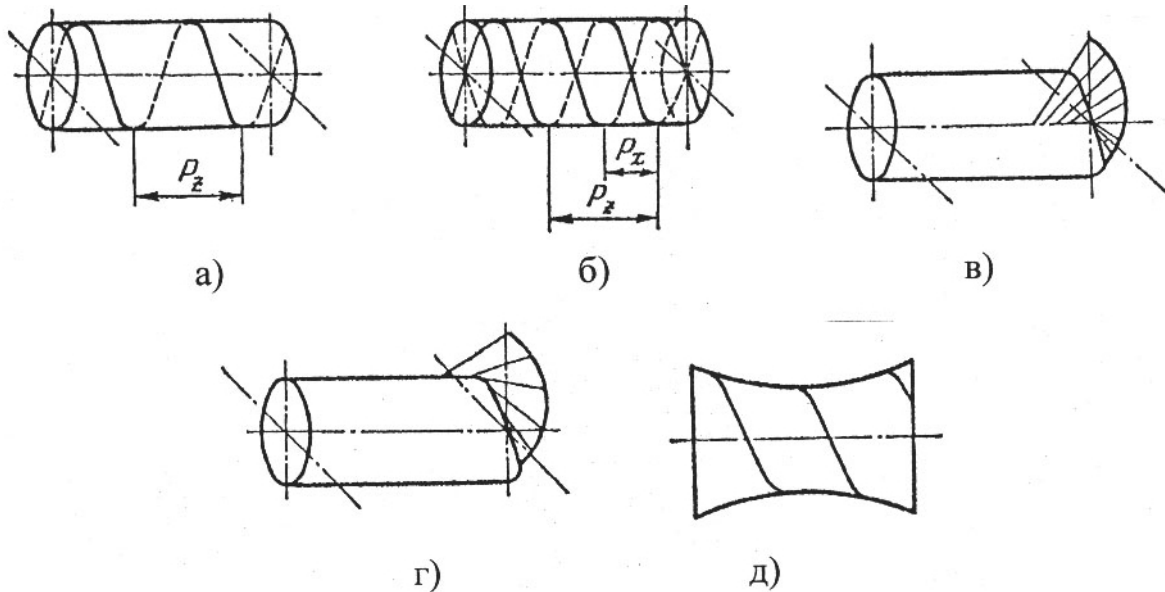


Рис. 1.19. Типи черв'яків

#### 1.4. Кулачкові механізми

Кулачкові механізми дозволяють одержати наперед заданий закон руху вихідної ланки (включаючи, при необхідності, тимчасові його зупинки) при безперервному, як правило, перманентному (рівномірному) русі вхідної ланки. Ці механізми знайшли широке застосування у двигунах внутрішнього згорання, у металообробних верстатах, у машинах-автоматах харчової, легкої, текстильної, поліграфічної й інших промисловостей.

**Кулачковим** називають механізм, до складу якого входить кулачок. **Кулачком** називають ланку, яка містить елемент вищої кінематичної пари, виконаний у вигляді поверхні змінної кривизни або зі змінним радіусом обертання точок елемента.

Кулачкові механізми розділяють на **плоскі** й **просторові**. У плоских кулачкових механізмах ланки переміщуються в паралельних площинах, а в просторових ця умова не виконується.

Нижче розглянуті плоскі кулачкові механізми. Найпростіший кулачковий механізм складається із трьох ланок (рис. 1.20,а): кулачка 1, штовхача 2 і стояка 3. Для зменшення тертя у вищій парі до складу механізму вводять **ролик** (рис.

1.20,б). Ведучою ланкою в кулачковому механізмі, як правило, є кулачок. Кулачок може робити як обертальний, так і поступальний рух. Вихідна ланка може робити як поступальний рух (рис. 1.20,а,б,в), таку ланку називають **штовхачем**, так і обертальний рух (рис. 1.21,а,в) – ланку називають **коромислом**.

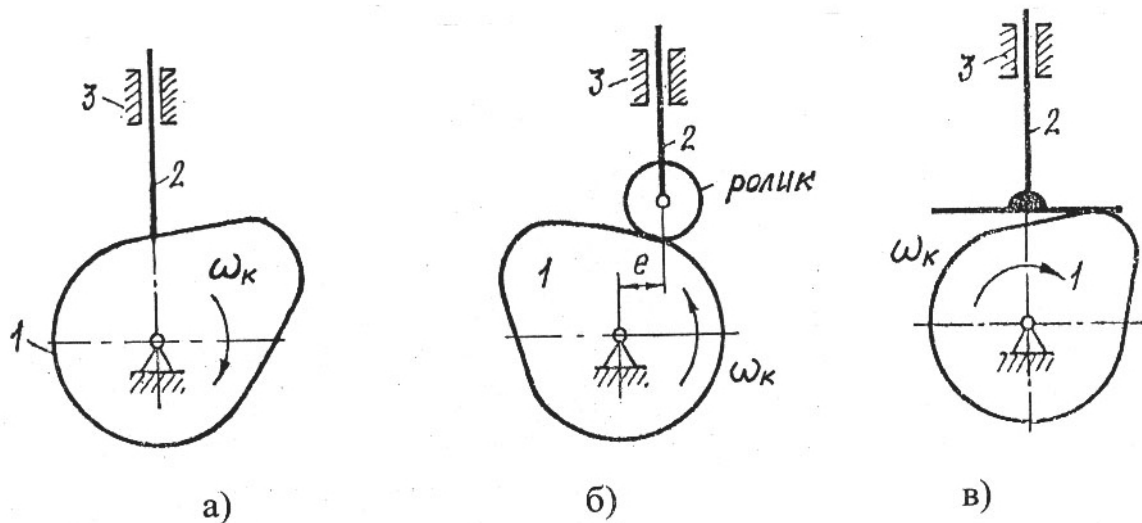


Рис. 1.20 – Види кулачкових механізмів

Залежно від конструкції вихідної ланки розрізняють кулачкові механізми з **голчастим** (рис. 1.20,а), **роликовим** (рис. 1.20,б), **плоским** (рис. 1.20,в) і інших видів штовхачем. Вісь штовхача, який робить зворотно-поступальний рух, може проходити через центр обертання кулачка (рис. 1.20,а,в) – **центральный** кулачковий механізм, або бути зміщена від центра на величину ексцентриситету  $e$  (рис. 1.20,б) – **нецентральный** кулачковий механізм.

За характером замикання вищої пари кулачкові механізми можуть бути із **силовим** (рис. 1.21,а) і з **геометричним** (рис. 1.21,б) замиканням.

Постійний контакт вихідної ланки із вхідною (можливо за допомогою ролика) при силовому замиканні відбувається під дією пружини, сили ваги, сили тиску рідини й т.п.

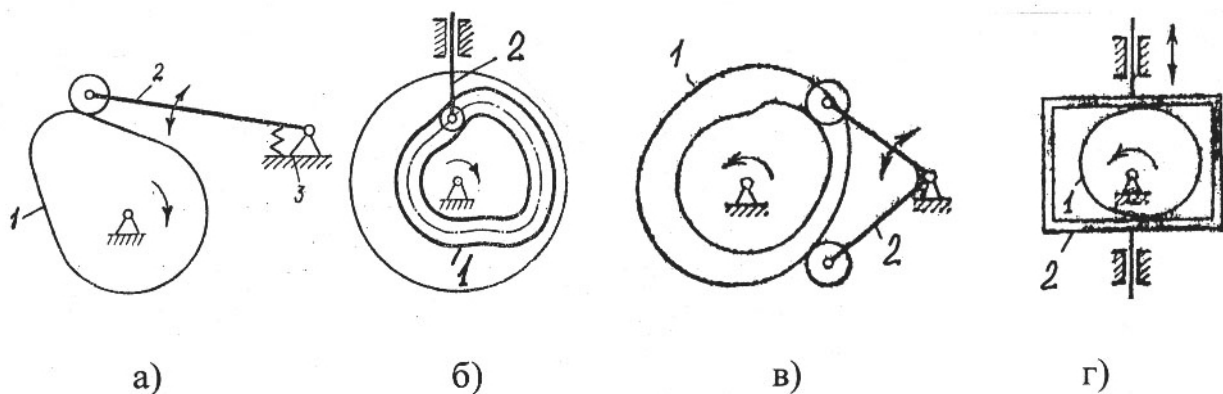


Рис. 1.21 – Способи замикання вищої пари

При геометричному замиканні можливість відриву ролика від кулачка усувається введенням додаткового (надлишкового) геометричного зв'язку, який не накладає обмеження на відносні рухи ланок.

Труднощі точного виконання паза в **пазовому кулачку** (рис. 1.21,б) і усунення ударів ролика об паз при зміні напрямку руху вихідної ланки привели до появи **дводискових кулачків** (рис. 1.21,в), у яких вихідна ланка взаємодіє із двома дисковими кулачками, жорстко з'єднаними між собою. Замість дводискового кулачка можна застосувати **діаметральний кулачок** (рис. 1.21,г), у якому профіль кулачка може бути обраний довільно тільки на деякій його ділянці. Іншу частину профілю кулачка одержують з умови дотику кулачка другої площини.

#### 1.4.1. Кінематичний аналіз кулачкових механізмів

При дослідженні кінематики ставиться наступне завдання: визначити закон руху вихідної ланки за заданими розмірами ланок, профілем та законом руху кулачка. Дослідження може бути виконане графічним і аналітичним методами. Частіше застосовується графічний метод.

На практиці використовують метод обернення руху механізму, суть якого, у даному випадку, полягає в тому, що всьому механізму мислено надається обертання з кутовою швидкістю  $(-\omega_k)$ . У результаті кулачок стає нерухомим (його профіль досить викреслити один раз), а стояк механізму з вихідною ланкою будуть рухатися із зазначеною швидкістю  $(-\omega_k)$ . Переміщення штовхача або кут повороту коромисла механізму при цьому методі легко визначити.

Визначимо закон руху вихідної ланки кулачковий механізм із голчастим штовхачем (рис. 1.22,а). Початкове положення механізму вибираємо таким, що при заданому напрямку обертання кулачка вістря штовхача перебувало б на початку кривої профілю кулачка, що відповідає початку видалення штовхача від центра обертання кулачка. Початок видалення штовхача при заданому профілі кулачка  $\rho = \rho(\varphi_k)$  визначається точкою  $A_1$  дотику кола мінімального радіуса  $r_0$  із профілем. Надаємо кулачковому механізму обертання з кутовою швидкістю  $(-\omega_k)$ . Опустивши із точки  $O_1$  перпендикуляр на лінію руху штовхача, знайдемо точку  $O'$  і, отже, ексцентриситет  $e$  – зміщення осі руху штовхача від центра обертання кулачка.

В оберненому русі всі положення осі штовхача будуть дотикатися кола радіуса  $e$ , проведеного з точки  $O_1$ . Вістря штовхача при цьому буде ковзати по профілю кулачка, тобто постійно буде змінюватися відстань між точками  $B_i$  штовхача й  $O'_i$  (або те ж саме, між  $B_i$  і  $O_1$ ). Тут  $i = 1 \dots 7$  – номер положення механізму. Перш ніж визначити закон переміщення штовхача, необхідно визначити **фазові кути повороту кулачка**, тобто кути повороту кулачка, які відповідають:  $\varphi_1$  – видаленню штовхача від центра кулачка (назвемо його *кут*

підйому),  $\varphi_2$  – далекому вистою (кут верхнього вистою),  $\varphi_3$  – наближенню штовхача до кулачка (кут опускання) і  $\varphi_4$  – ближньому вистою (кут нижнього вистою). Початку й кінцю кожної фази руху відповідають певні точки профілю кулачка. Початку підйому й кінцю опускання відповідають точки  $A_1$  і  $A'_7$  дотику кола радіуса  $r_0$  із профілем кулачка. Кінцю підйому й початку опускання відповідають точки  $A_7$  і  $A'_1$  дотику кола радіуса  $r'_0$  із профілем кулачка. Кути  $\varphi_2$  й  $\varphi_4$  пропорційні дугам радіусів  $r'_0$  і  $r_0$  профілю кулачка, проведеним із центра  $O_1$ .

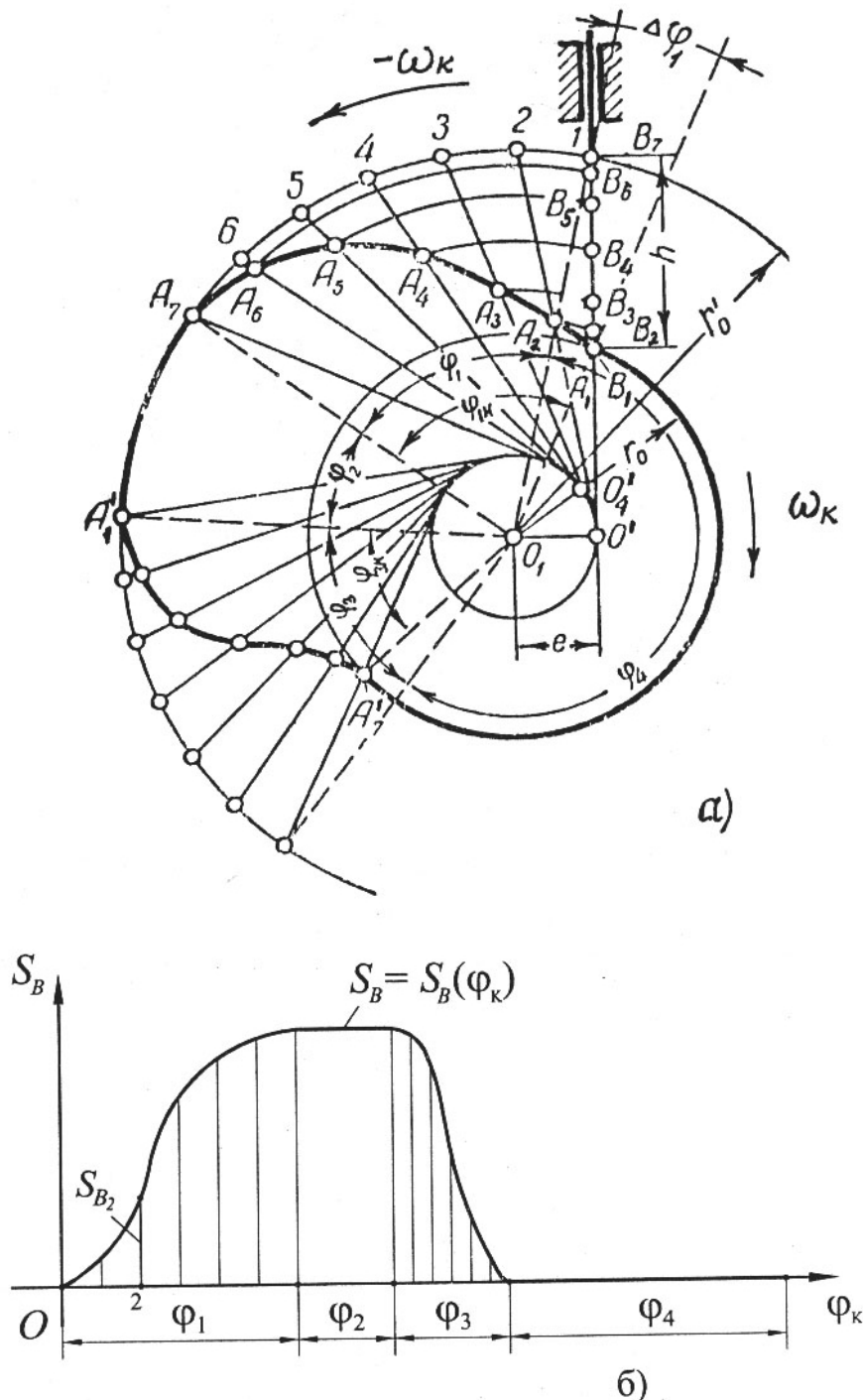


Рис. 1.22 – До визначення закону руху штовхача

Для установлення закону руху штовхача виконуємо наступну побудову. З точки  $O_1$  довільним радіусом, наприклад  $r'_0$ , описуємо коло. Дуги, укладені між точками перетинання цього кола з віссю руху штовхача на початку й кінці фаз підйому й опускання, ділимо на рівні частини (у нашому випадку на шість частин). Центральний кут  $\varphi_1$ , який стягається знайденою дугою  $B_7A_7$ , дорівнює куту повороту кулачка, при якому відбувається підйом штовхача. Аналогічно знаходимо кут повороту кулачка для фази опускання.

Якщо через кожну з побудованих точок 1, 2, 3 і т.д. дуги  $B_7A_7$  провести дотичні до окружності радіуса  $e$ , то точки перетинання їх із профілем кулачка визначають положення вістря штовхача, які відповідають заданому значенню кута повороту кулачка.

Кути  $\varphi_1$  й  $\varphi_3$  повороту кулачка відрізняються від відповідних їм центральних кутів  $\varphi_{1\kappa}$  і  $\varphi_{3\kappa}$  на кулачку, які стягаються частинами профілю кулачка на фазах підйому й опускання штовхача.

Дійсні положення точок  $B_i$  для заданих положень кулачка можуть бути знайдені перенесенням точок  $A_i$  на лінію руху точки  $B$  штовхача. Для цього з точки  $O_1$  описуємо дуги кіл радіусів  $O_1A_i$  до перетинання із прямою  $O'B$ . У результаті цього одержуємо послідовні положення  $B_1, B_2, \dots B_7$  точки  $B$ . Якщо масштабний коефіцієнт побудови  $\mu_l$ , то переміщення вістря штовхача  $S_{B_i} = (B_1B_i) \cdot \mu_l$ . Аналогічно знаходимо положення штовхача на фазі опускання. За знайденим значенням  $S_{B_i}$  будуємо діаграму  $S_B = S_B(\varphi_K)$  переміщення штовхача залежно від кута повороту кулачка (рис. 30,б). Із цією метою на осі абсцис відкладаємо відрізок  $x$  довільної довжини, пропорційний куту повороту кулачка на один оберт ( $360^\circ$ ) і ділимо його на частини пропорційні фазовим кутам  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  і  $\varphi_4$ . Далі кожний з відрізків, пропорційний кутам  $\varphi_1$  і  $\varphi_3$  ділимо на таке ж число рівних частин, на яке поділені відповідні їм кути на плані механізму (у нашому випадку на шість). Від відповідних точок розподілу на осі абсцис відкладаємо вгору, паралельно осям ординат, переміщення точки  $B - S_{B_i}$  у відповідному масштабному коефіцієнті  $\mu_l$  (можна прийняти попередньо). З'єднавши плавною кривою кінці відрізків  $Y_{S_{B_i}} = S_{B_i} / \mu_l$ , одержимо діаграму переміщення точки  $B$   $S_B = S_B(\varphi_K)$ . Масштабний коефіцієнт  $\mu_\varphi$  кута повороту кулачка, який відкладається по осі абсцис,  $\mu_\varphi = 2\pi/x$  рад/мм.

Маючи графік переміщення  $S_B = S_B(\varphi_K)$  вихідної ланки механізму – штовхача, методом графічного диференціювання можуть бути побудовані

графіки аналога лінійної його швидкості  $S'_B = \frac{dS_B}{d\varphi_K}$  й аналога лінійного його

прискорення  $S''_B = \frac{dS'_B}{d\varphi_K} = \frac{d^2S_B}{d\varphi_K^2}$ .

Аналогічно будують графіки переміщень, відповідно лінійних або кутових, вихідної ланки інших типів кулачкових механізмів.

### 1.5. Динамічний аналіз механізмів

При динамічному аналізі вирішують наступні **основні задачі**:

1) вивчення впливу зовнішніх сил, сил ваги ланок, сил тертя й сил інерції (масових сил) на ланки механізму, на елементи кінематичних пар, на нерухомі опори й установлення способів зменшення динамічних навантажень, що виникають при русі механізму;

2) вивчення режиму руху механізму під дією заданих сил і установлення способів, які забезпечують задані режими руху механізму.

Перша задача називається **силовим (кінетостатичним) аналізом механізмів**, а друга задача має назву **динаміки механізмів**.

Поряд з цими задачами в динаміці механізмів розглядають наступні питання: визначення сил тертя в кінематичних парах, визначення ККД, регулювання ходу машини, зрівноважування сил інерції ланок механізму й т.д.

#### 1.5.1. Силове дослідження механізмів

Закони руху вхідних ланок при силовому дослідженні вважають заданими, отже, відомими є кінематичні показники всіх ланок і окремих їх точок: положення, швидкості й прискорення. Зовнішні сили, прикладені до ланок, також вважають заданими. Отже, при силовому розрахунку визначенню підлягають тільки **реакції в кінематичних парах** механізму.

**Сили, які діють на ланки механізму**, можна розділити на активні, або задані, й реакції зв'язків у кінематичних парах.

До **активних сил** відносять рушійні сили, сили опору, сили ваги, сили інерції.

*Рушійна* сила – це сила, яка утворює гострий кут з вектором швидкості точки її прикладання. *Сила опору* – це сила, яка утворює тупий кут з вектором швидкості точки її прикладання. Рушійні сили прискорюють рух механізму, а сили опору сповільнюють його. Розрізняють сили *виробничих* (корисних) і *невиробничих* (шкідливих) опорів. Сили виробничих опорів, прикладені до веденої ланки, роблять корисну роботу відповідно до технологічного процесу (сили різання, сили переміщення вантажів і т.п.). Сили невикористаних опорів виражають вплив середовища, у якому відбувається рух ланок. Сюди відносять *сили тертя* в кінематичних парах, сили опору, обумовлені жорсткістю гнучких зв'язків (ременів у пасових передачах), наявністю надлишкових зв'язків і т.п. *Сили ваги* ланок прикладені в їх центрах ваги. Вони роблять корисну роботу,



якщо центри ваги опускаються, й від'ємну, якщо ці центри піднімаються. *Сили інерції* (моменти сил інерції) виникають у результаті нерівномірності руху ланок.

Для ланок плоских механізмів головний вектор сил інерції  $\bar{F}_u$  й головний момент сил інерції  $\bar{M}_u$  визначають за формулами:

$$\bar{F}_u = -m \cdot \bar{a}_s, \quad (1.38)$$

$$\bar{M}_u = -I_s \cdot \bar{\varepsilon}, \quad (1.39)$$

де  $m$  – маса ланки,  $\bar{a}_s$  – вектор прискорення центра мас ланки;  $I_s$  – момент інерції ланки відносно осі, яка проходить через центр мас перпендикулярно площині руху;  $\bar{\varepsilon}$  – кутове прискорення ланки.

Для кожної ланки плоского кінематичного ланцюга можна записати три рівняння рівноваги кінетостатики. Тоді для кінематичного ланцюга, який складається з  $n$  ланок, число рівнянь рівноваги буде дорівнювати  $3n$ . Число невідомих параметрів для кожної однорухливої кінематичної пари  $p_1$  дорівнює двом: модуль реакції  $\bar{R}_{ji}$  ланки  $j$  на ланку  $i$  і кут  $\alpha_{ji}$  – для обертальної кінематичної пари (рис. 1.236,а); модуль реакції  $\bar{R}_{ji}$  й координата  $x_{ji}$  – для поступальної кінематичної пари (рис. 35,б).

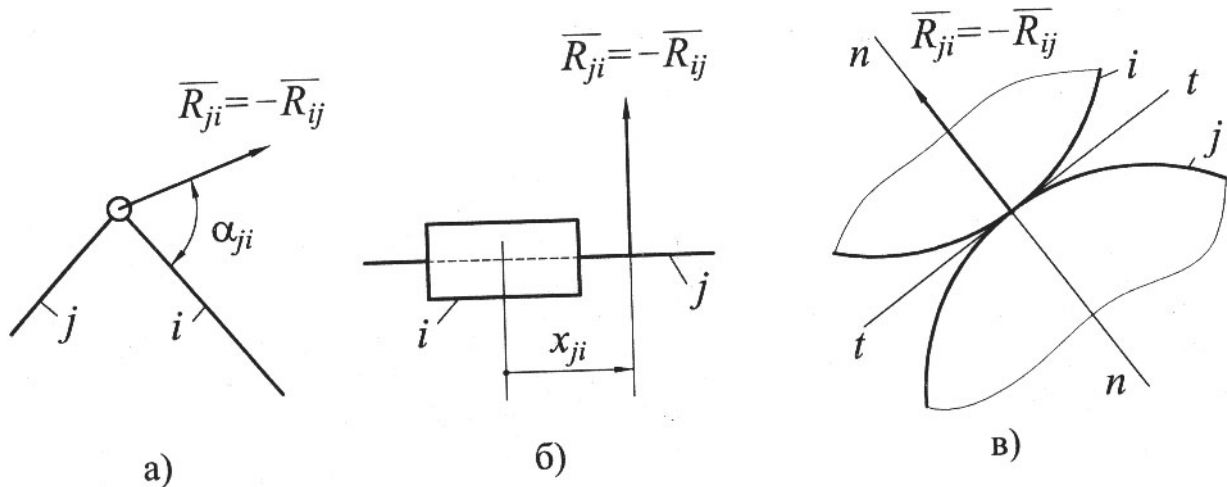


Рис. 1.23 – Реакції в кінематичних парах плоских механізмів

У вищій дворухливій кінематичній парі  $p_2$  плоского механізму невідомим параметром є тільки модуль реакції  $\bar{R}_{ji}$ , тому що напрямок реакції (по нормалі  $n$ - $n$  до дотичних поверхонь) і точка її прикладання (точка контакту) відомі (рис. 1.23,в).

Для статично визначених механічних систем, число рівнянь рівноваги кінетостатики повинно дорівнювати числу невідомих, тобто повинна виконуватися рівність

$$3 \cdot n = 2 \cdot p_1 + p_2, \quad (1.40)$$

де  $p_1$  й  $p_2$  – число одно- і дворухливих кінематичних пар.

Якщо плоский кінематичний ланцюг складається тільки з нижчих пар (помітимо, що вищі пари завжди можна замінити еквівалентним числом нижчих однорухливих кінематичних пар), то на підставі (1.40) одержимо

$$p_1 = (3/2) \cdot n. \quad (1.41)$$

Рівність (1.41) ідентична виразу (1.5), на підставі чого робимо висновок, що групи Ассура є статично визначеними кінематичними ланцюгами. З наведеного випливає, що силове дослідження механізмів потрібно проводити по групах Ассура, починаючи розрахунок з найбільш вилученої від вхідної ланки й закінчуючи розрахунком вхідної ланки.

Графічне визначення реакцій у кінематичних парах плоских механізмів шляхом побудови планів сил застосовують не тільки через наочність, але й тому, що сили, які діють на ланки механізму, звичайно відомі або визначені лише приблизно й точність найпростіших графічних побудов часто виявляється цілком достатньою.

Побудову планів сил покажемо на прикладі групи Ассура другого класу першого виду (рис. 1.24,а), узятій з механізму, схема якого представлена на рис.6. Кінетостатичне дослідження звичайно виконують методом послідовних наближень (для достовірної для практики точності досить одного або двох наближень).

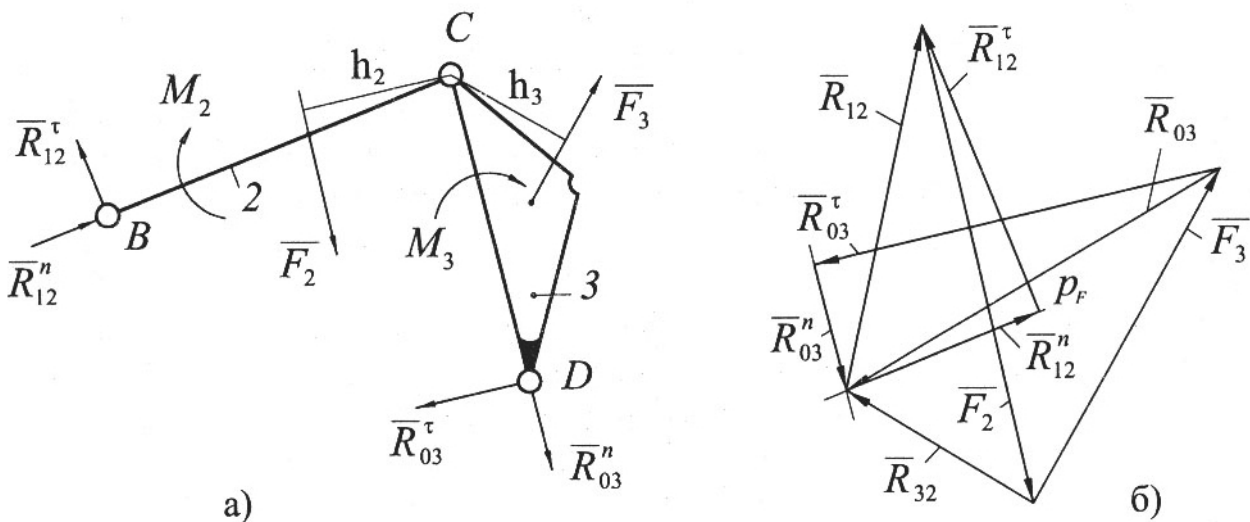


Рис. 1.24 – До силового дослідження групи Ассура другого класу першого виду

У першому наближенні сили тертя не враховують, що дає можливість невідомі реакції направляти по нормалі до сполучених поверхонь (див. рис. 1.23).

Накреслимо групу Ассура 2-3 у масштабі коефіцієнті  $\mu_l$  й завантажуюмо її ланки зовнішніми навантаженнями (у тому числі й силами ваги, інерції й сили з боку відкинutoї ланки 4), представленими головними векторами зовнішніх сил  $\bar{F}_2$ ,  $\bar{F}_3$  і головними моментами зовнішніх сил  $M_2$ ,  $M_3$ . Визначимо на початку реакції в зовнішніх кінематичних парах  $B$  і  $D$ , які виражають дії від'єднаних ланок 1 і 0 на ланки 2 і 3 відповідно. Позначимо ці

реакції відповідно  $\bar{R}_{12}$  й  $\bar{R}_{03}$ . Для цих реакцій відомі тільки точки їх прикладання (центри шарнірів  $B$  і  $D$ ). Розкладемо реакції  $\bar{R}_{12}$  й  $\bar{R}_{03}$  на два напрямки: нормальний – паралельний поздовжньої осі ланки, до якої прикладена реакція, й тангенціальний – перпендикулярний відповідній осі.

Тангенціальні складові реакцій  $\bar{R}_{12}^{\tau}$  і  $\bar{R}_{03}^{\tau}$  можна визначити з рівнянь рівності нулю моментів сил, записаних для кожної з ланок 2 і 3 відносно центра шарніра  $B$ . Напрямки дії цих складових вибираємо довільно, а потім уточнюємо в процесі розрахунку (якщо відповідь одержимо з додатним знаком, то попередньо заданий напрямок обраний вірно, у протилежному випадку – напрямок вектора змінюємо на протилежний). Наприклад, для ланки 2 зазначене рівняння рівноваги має вигляд

$$R_{12}^{\tau} l_{CB} + M_2 - F_2 h_2 \mu_l = 0, \quad (1.42)$$

де  $h_2$  – плече сили  $\bar{F}_2$  відносно центра шарніра  $B$ , визначене із креслення групи Ассура.

У рівняння (1.42) не входять моменти від сил  $\bar{R}_{12}^n$  і  $\bar{R}_{32}$ , тому що лінія дії  $\bar{R}_{12}^n$  проходить через точку  $B$ , а реакція  $\bar{R}_{32}$  діє в цій точці. Вирішуючи рівняння (1.42), знаходимо

$$R_{12}^{\tau} = \frac{F_2 h_2 \mu_l - M_2}{l_{CB}}. \quad (1.43)$$

Аналогічно визначаємо реакцію  $\bar{R}_{03}^{\tau}$ , розглядаючи рівновагу 3-ої ланки. Маємо

$$R_{03}^{\tau} = \frac{F_3 h_3 \mu_l - M_3}{l_{CD}}. \quad (1.44)$$

Для визначення повних реакцій  $\bar{R}_{12}$ ,  $\bar{R}_{03}$  і їх нормальних складових розглянемо рівновагу в цілому групи 2-3. Запишемо рівняння рівноваги сил, які діють на ланки цієї групи

$$\bar{R}_{12}^n + \bar{R}_{12}^{\tau} + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 + \bar{R}_{03}^{\tau} + \bar{R}_{03}^n = 0. \quad (1.45)$$

Рівняння (1.45) вирішуємо графічним методом, тобто будуємо план сил у певному масштабному коефіцієнті  $\mu_F$ , Н/мм (рис. 1.24,б).

Для визначення реакції в шарнірі 3 розглядаємо рівновагу або 2-ої, або 3 -ої ланки. Наприклад, рівняння рівноваги сил для 2-ої ланки має вигляд

$$\bar{R}_{12} + \bar{F}_2 + \bar{R}_{32} = 0. \quad (1.46)$$

Використовуючи попередній план сил, з'єднавши кінець вектора  $\bar{F}_2$  з початком вектора  $\bar{R}_{12}$ , визначаємо вектор  $\bar{R}_{32}$  (див. рис. 1.24,б).

Вхідна ланка під дією прикладених до неї сил не буде перебувати в рівновазі, оскільки число рівнянь рівноваги для неї (три) на одиницю більше числа невідомих параметрів реакцій. Для забезпечення рівноваги вхідної ланки, наприклад, кривошипа (рис. 1.25,а), необхідно до неї прикласти момент, який

зрівноважує дію всіх сил, прикладених до ланок механізму, якщо рух їй передається через муфту, або силу, якщо рух цій ланці надається через передавальний механізм (наприклад, зубчастий). Ці величини називають, відповідно, **зрівноважуючим моментом** і **зрівноважуючою силою** (на рис. 1.25,а показаний прикладений до кривошипа зрівноважуючий момент).

Прикладемо до ланки, накресленої у масштабному коефіцієнті  $\mu_l$ , головний вектор  $\bar{F}_1$  всіх зовнішніх сил і головний момент  $M_1$  всіх зовнішніх пар сил. У центрі шарніра  $B$  прикладемо реакцію зв'язку  $\bar{R}_{21} = -\bar{R}_{12}$  від відкинутої ланки 2 групи Ассур (помітимо, що реакція  $\bar{R}_{12}$  повністю визначена при розрахунку групи).

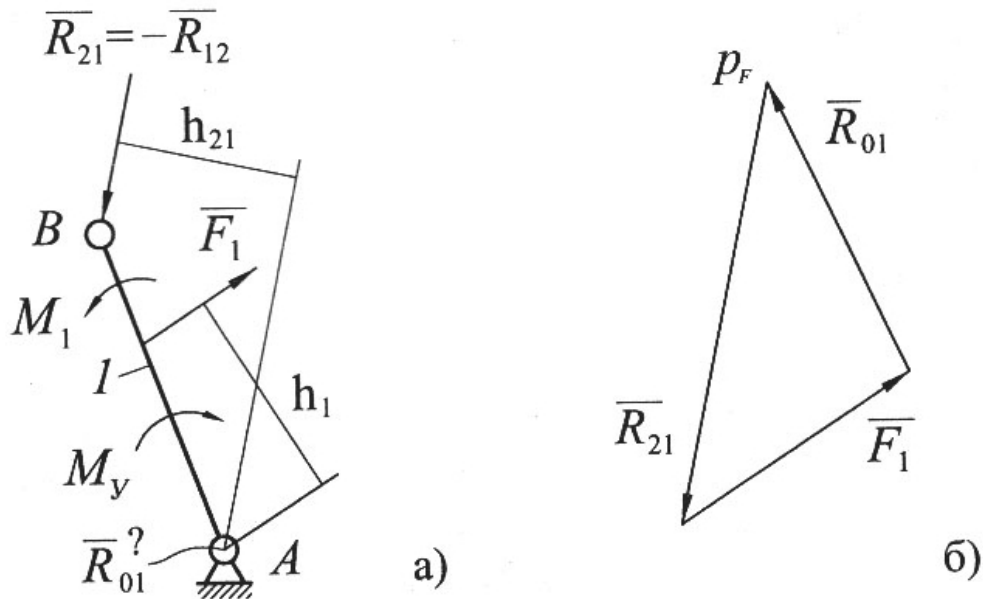


Рис. 1.25 – До силового дослідження початкової ланки

Зрівноважуючий момент  $M_y$ , прикладений до вхідної ланки  $I$ , визначаємо з умови рівності нулю суми моментів всіх сил, які діють на ланку, відносно точки  $A$

$$M_y + F_1 h_1 \mu_l - M_1 - R_{21} h_{21} \mu_l = 0, \quad (1.47)$$

де  $h_1, h_{21}$  – плечі відповідних сил, визначені із креслення.

Маємо

$$M_y = M_1 + R_{21} h_{21} \mu_l - F_1 h_1 \mu_l = 0. \quad (1.48)$$

Модуль і напрямок реакції  $\bar{R}_{01}$ , яка діє з боку стояка  $\theta$  механізму на кривошип  $I$ , визначаємо з умови рівноваги ланки

$$\bar{R}_{01} + \bar{F}_1 + \bar{R}_{21} = 0. \quad (1.49)$$

На підставі (1.49) будуємо план сил у масштабному коефіцієнті  $\mu_F$ , звідки безпосередньо знаходимо модуль і напрямок реакції  $\bar{R}_{01}$  (рис. 1.25,б).

Якщо кривошип приводиться в рух через зубчасту передачу, то замість зрівноважуючого моменту на зубчасте колесо, жорстко з'єднане із кривошипом, з боку шестерні діє зрівноважуюча сила  $\bar{F}_v$  з відомою точкою прикладання (полюс зачеплення) і лінією дії (лінія зачеплення). Значення зрівноважуючої сили визначаємо в цьому випадку з рівняння, аналогічного рівнянню (1.47), у якому замість моменту  $M_v$  буде добуток даної сили на плече  $F_v h_v \mu_l$ , а реакцію  $\bar{R}_{01}$  – з рівняння (1.49), у яке потрібно додати вектор  $\bar{F}_v$ .

### 1.5.2. Врахування сил тертя при силовому дослідженні

Після виконання першого етапу силового дослідження, якщо буде потреба, переходять до другого етапу, додаючи до прикладених зовнішніх сил сили тертя, які діють у кінематичних парах, і заново повторюють силовий розрахунок.

Залежно від змащення тертьових поверхонь розрізняють тертя сухе, напівсухе, напіврідинне й рідинне. **Сухе тертя** – тертя незмазаних поверхонь, тобто тертя, яке виникає при русі безпосередньо контактуючих тіл. **Рідинне тертя** – тертя при русі сполучених поверхонь, розділених шаром мастильного матеріалу. Тут силами тертя є сили опору зсуву окремих шарів змащення. Проміжними, між сухим і рідинним тертями, є **напівсухе** або **напіврідинне** тертя залежно від того, яке тертя є домінуючим – сухе чи рідинне.

Сухе й рідинне тертя різні за своєю природою, тому різні підходи й методи врахування сил тертя в механізмах.

Залежно від виду відносного руху контактуючих поверхонь ланок розрізняють **тертя ковзання** й **тертя кочення**.

**Тертя ковзання в кінематичних парах механізмів. Поступальна кінематична пара.** Розглянемо повзун, на який діють зовнішні сили:  $\bar{Q}$  – перпендикулярно напрямній й  $\bar{F}$  – паралельно напрямній (рис. 1.26,а).

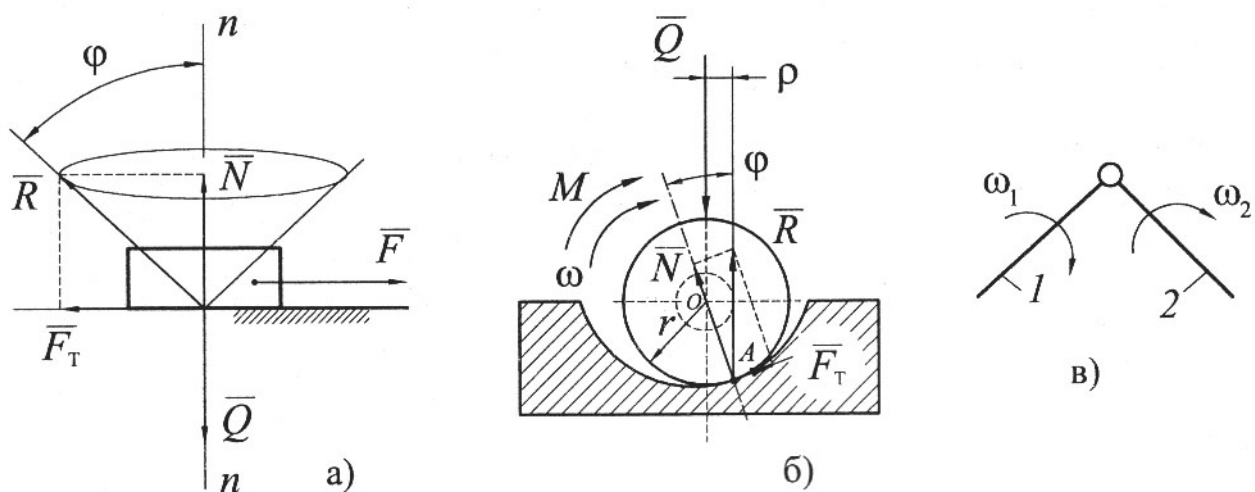


Рис. 1.26 – До визначення сил тертя в поступальній кінематичній парі

Якщо видалити зв'язок повзуна з напрямною, то для забезпечення рівноваги повзуна необхідно врахувати вплив на нього нормальної реакції  $\bar{N}$  й сили тертя  $\bar{F}_T$ , причому ця сила тертя завжди спрямована проти відносної швидкості дотичних тіл (у цьому випадку проти швидкості руху повзуна).

Сила сухого тертя відповідно до **закону Амонтона–Кулона** дорівнює

$$F_T = f N, \quad (1.50)$$

де  $f$  – **коефіцієнт тертя ковзання**.

Експерименти показали, що сила тертя в початковий момент руху (сила тертя спокою  $F_{Tn}$ ) трохи більша сили тертя руху  $F_T$ . При цьому  $F_{Tn} = f_n N$ , де  $f_n$  – **коефіцієнт тертя спокою** або **коефіцієнт зчеплення**. З рис. 1.26,а випливає, що повна реакція між повзуном і напрямною  $\bar{R} = \bar{N} + \bar{F}_T$ . Із силового трикутника видно, що  $\operatorname{tg}\varphi = F_T/N$ , де кут  $\varphi$  – називають **кутом тертя**. Порівнюючи останню залежність із формулою (1.50) установимо, що  $\operatorname{tg}\varphi = f$ , отже  $\varphi = \operatorname{arctg} f$ . Помітимо, що граничне значення кута тертя обмежене величиною  $\varphi_n = \operatorname{arctg} f_n$ . Якщо зовнішні сили  $\bar{F}$  й  $\bar{Q}$  будуть діяти в різних площинах, то можливі положення реакції  $\bar{R}$  в просторі розташовуються на конусі, який називається **конусом тертя**, з кутом вершини конуса  $\varphi$ . Якщо лінія дії рівнодіючої всіх зовнішніх сил проходить усередині конуса тертя, то відбувається заклинювання повзуна, тобто рух стає неможливим, тому що при цьому  $F_T > F$ . На підставі наведеного вище, можна зробити висновок, що для врахування сили тертя в поступальній кінематичній парі досить нормальну реакцію  $\bar{N}$  відхилити на кут тертя в бік, протилежний відносній швидкості тертьових поверхонь дотичних ланок.

**Обертальна кінематична пара.** Розглянемо обертання цапфи вала в підшипнику при наявності деякого зазору (рис. 1.26,б). **Цапфою** називають частину вала, яка перебуває в підшипнику. На обертний з кутовою швидкістю  $\omega$  вал діє зовнішній момент  $M$ .

На початку руху, з урахуванням тертя, цапфа накочується на підшипник доти, поки не з'явиться ковзання. Припустимо, що цьому моменту відповідає точка дотику  $A$ . При цьому повна реакція  $\bar{R} = \bar{N} + \bar{F}_T$  зміститься відносно лінії дії сили  $\bar{Q}$  на величину  $\rho$ , яка залежить від коефіцієнта тертя й радіуса цапфи  $r$ . З умови рівноваги цапфи випливає, що  $R = Q$ . Виникаюча при цьому сила тертя дорівнює

$$F_T = f \cdot N = f \cdot R \cdot \cos \varphi = f \cdot Q \cdot \cos \varphi, \quad (1.51)$$

а виникаючий момент від цієї сили тертя, який протидіє зовнішньому моменту (з урахуванням, що  $f = \operatorname{tg}\varphi$ ), є

$$M_T = F_T \cdot r = f \cdot Q \cdot r \cdot \cos \varphi = Q \cdot r \cdot \sin \varphi = Q \cdot \rho,$$

де  $\rho = r \cdot \sin \varphi$ .

Реакція  $\bar{R}$  завжди спрямована по дотичній до кола радіуса  $\rho$  із центром, розташованим у точці  $O$ . Круг радіуса  $\rho$  називають **кругом тертя**. Оскільки кути тертя малі, то можна прийняти  $\sin \varphi \approx \operatorname{tg} \varphi$ . Тоді

$$M_T = Q \cdot r \cdot \operatorname{tg} \varphi = f_1 \cdot Q \cdot r, \quad (1.52)$$

де  $f_1$  – коефіцієнт тертя в обертальній кінематичній парі (рекомендації з вибору значень цього коефіцієнта базуються на результатах експериментів).

Момент тертя направляють проти відносної кутової швидкості дотичних ланок. Наприклад, у кінематичній парі (рис. 1.26,в) момент тертя на ланку 1 діє в напрямку, протилежному напрямку відносної кутової швидкості  $\bar{\omega}_{21} = \bar{\omega}_2 - \bar{\omega}_1$ , а на ланку 2 – проти кутової швидкості  $\bar{\omega}_{12} = \bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2$ .

**Тертя кочення.** Природа тертя кочення інша, ніж природа тертя ковзання. Опір при коченні тіл одного по іншому визначається в основному внутрішнім тертям матеріалів дотичних тіл. Експериментом встановлено, що опір при коченні залежить від притискальної сили, пружних властивостей матеріалів, кривизни дотичних поверхонь, коефіцієнтів тертя матеріалів і відносної кутової швидкості тіл, які перекочуються.

Розглянемо циліндричне тіло, яке лежить нерухомо на площині й навантажено радіальною силою  $\bar{Q}$  (рис. 1.27,а). У зоні контакту циліндра із площиною виникають контактні напруження. Епюра цих напружень симетрична й лінія дії рівнодіючої  $\bar{N}$  збігається з лінією дії сили  $\bar{Q}$ .

При перекочуванні циліндра по площині (рис. 1.27,б) ділянка контакту ( $km$ ) перебуває в області зростаючих деформацій, а інша ділянка ( $nk$ ) – в області загасаючих деформацій. Епюра напружень в області наростаючих деформацій вище такої ж епюри в зоні згасальних деформацій внаслідок внутрішнього тертя в матеріалах, тобто в результаті пружності матеріалів. Контактні напруження розподіляються несиметрично відносно лінії дії сили  $\bar{Q}$ .

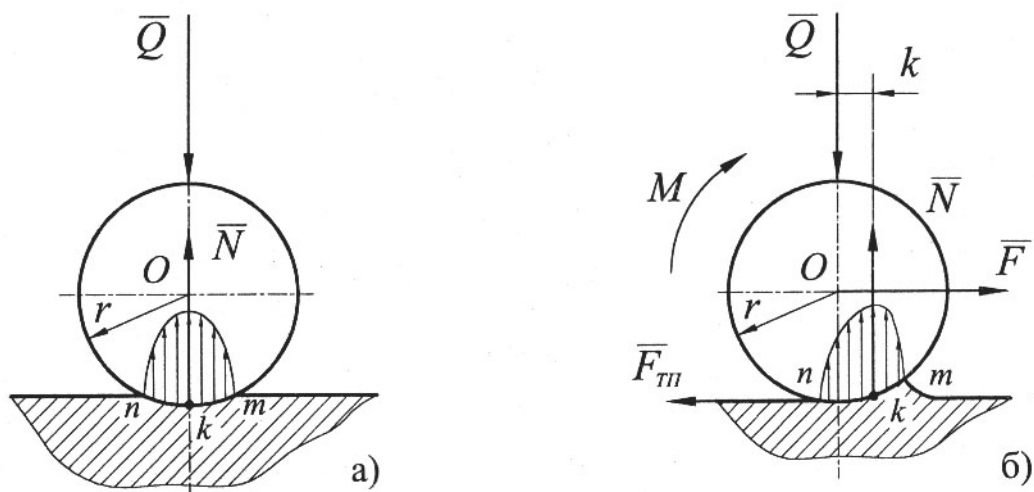


Рис. 1.27 До визначення моменту тертя кочення

Рівнодіюча сила  $\bar{N} = -\bar{Q}$  цих напружень зміщена на величину  $k$ , яка називається плечем сили тертя кочення або **коефіцієнтом тертя кочення**.

Момент тертя кочення, який діє на циліндр,

$$M_{TK} = N \cdot k = Q \cdot k . \quad (1.53)$$

Розглянемо умову рівномірного кочення циліндра під дією горизонтальної сили  $\bar{F}$ , прикладеної в точці  $O$  (рис. 1.27,б). З умови рівноваги циліндра, який рівномірно рухається по поверхні, визначаємо цю силу як  $F = Q \cdot k / r$ , де  $r$  – радіус основи циліндра. Для забезпечення чистого кочення циліндра необхідно, щоб сила  $\bar{F}$  була менша сили тертя ковзання спокою  $\bar{F}_{ТП}$ , прикладеної до циліндра в місці його дотику із площиною, тобто (з урахуванням, що  $F_{ТП} = f_{П} \cdot Q$ ) повинна задовольнятися умова  $F < f_{П} \cdot Q$ .

### 1.5.3. Режим роботи машин і коефіцієнт корисної дії

Повним часом роботи машини називають проміжок часу від моменту початку руху до повної її зупинки. Сказане відноситься й до початкових ланок механізму або машини, тому що рухи інших ланок залежать від їх руху.

Повний час роботи машини складається із трьох частин: **часу розбігу**, **усталеного руху** й **вибігу** (рис. 1.28,а).

Час розбігу  $t_p$  характеризується зростанням швидкості ведучої (початкової) ланки від нульового до деякого середнього її значення. Отже, на цьому інтервалі часу

$$A_{ДС} > A_{СС} , \quad (1.54)$$

де  $A_{ДС}$ ,  $A_{СС}$  – відповідно роботи рушійних сил і сил опору.

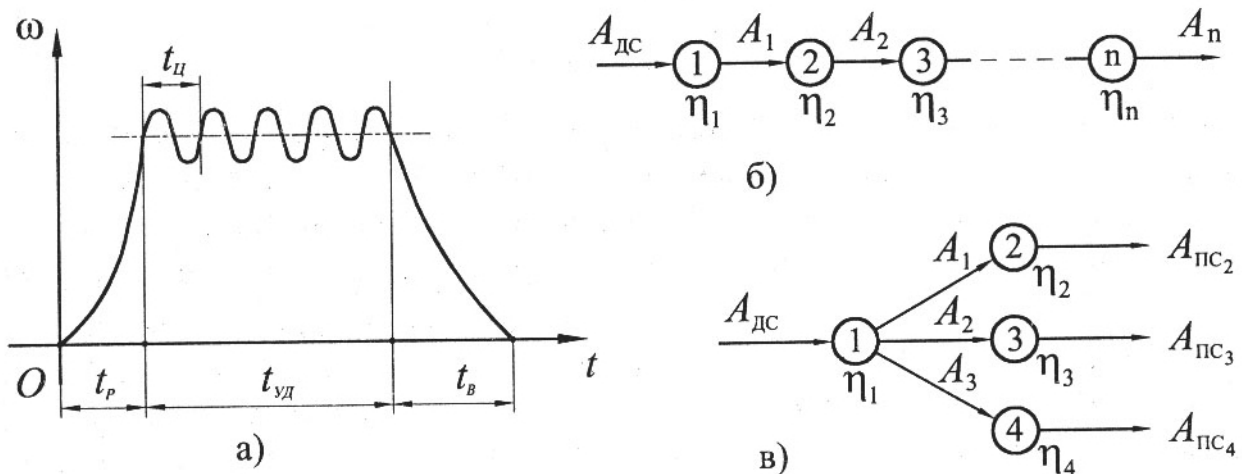


Рис. 1.28 – Тахограма механізму – а),  
послідовне – б) і паралельне – в) з'єднання механізмів



У режимі усталеного руху кутова швидкість початкової ланки  $\omega$ , змінюючись періодично, має однакові значення на початку й наприкінці періоду  $t_{\text{ц}}$ . Проміжок часу  $t_{\text{ц}}$ , після закінчення якого положення, швидкість і прискорення початкової ланки механізму приймають початкові значення, є періодом зміни кінетичної енергії механізму й називають **циклом усталеного руху механізму**. Отже, за цей цикл нерівність (1.54) переходить у рівність

$$A_{\text{ДС}} = A_{\text{СС}} . \quad (1.55)$$

Для часу вибігу наступна швидкість початкової ланки менша, ніж попередня її швидкість, тобто  $V < V_0$ , тому повинна виконуватися нерівність

$$A_{\text{ДС}} < A_{\text{СС}} . \quad (1.56)$$

Рівняння кінетичної енергії механізму має вигляд

$$A_{\text{ДС}} - A_{\text{СС}} = \sum \frac{m \cdot V^2}{2} - \sum \frac{m \cdot V_0^2}{2} . \quad (1.57)$$

Відповідно до залежностей (1.54) – (1.56) для часу розбігу маємо

$$\sum \frac{m \cdot V^2}{2} - \sum \frac{m \cdot V_0^2}{2} > 0 , \quad (1.58)$$

для цілого числа циклів під час усталеного руху

$$\sum \frac{m \cdot V^2}{2} - \sum \frac{m \cdot V_0^2}{2} = 0 , \quad (1.59)$$

а для часу вибігу

$$\sum \frac{m \cdot V^2}{2} - \sum \frac{m \cdot V_0^2}{2} < 0 . \quad (1.60)$$

З отриманих виразів випливає, що за час розбігу відбувається накопичення кінетичної енергії механізму. За час сталого руху збільшення кінетичної енергії за цілий цикл руху механізму дорівнює нулю. За час вибігу механізму відбувається віддача кінетичної енергії, накопиченої за час розбігу.

**Рівняння руху механізму у формі інтеграла енергії** (рівняння кінетичної енергії). Для визначення законів руху початкових ланок за заданими силами, які діють на ланки механізму, використовують рівняння (1.57), яке в інтегральній формі має вигляд

$$\sum_{i=1}^n T_i - \sum_{i=1}^n T_{i0} = \sum_{i=1}^n A_i , \quad (1.61)$$

де  $n$  – число рухливих ланок механізму;  $A_i$  – робота зовнішніх (стосовно механізму) сил, які діють на ланку  $i$  на кінцевому переміщенні за розглянутий проміжок часу;  $T_i$  – кінетична енергія ланки  $i$  наприкінці розглянутого проміжку часу;  $T_{i0}$  – кінетична енергія ланки  $i$  на початку цього проміжку часу.

Рівняння (1.61) можна одержати також з диференціальних рівнянь руху ланок механізму шляхом їх інтегрування. На цій підставі це рівняння називають **рівнянням руху механізму у формі інтеграла енергії**.

**Механічний коефіцієнт корисної дії (ККД).** Розглянемо механізм у період усталеного руху. За розглянутий період робота, яка виконується силами ваги й інерції, дорівнює нулю, тобто справедлива рівність (1.55). Маємо

$$A_{ДС} = A_{СС} = A_{ПС} + A_T, \quad (1.62)$$

де  $A_{ПС}$ ,  $A_T$  – роботи сил корисних опорів і сил шкідливих опорів (будемо враховувати тільки сили тертя) відповідно.

**Механічним коефіцієнтом корисної дії називають відношення роботи сил корисних опорів до роботи рушійних сил за цикл усталеного руху**

$$\eta = A_{ПС} / A_{ДС}. \quad (1.63)$$

Беручи до уваги (1.62), одержимо

$$\eta = \frac{A_{ПС}}{A_{ПС} + A_T} = \frac{A_{ДС} - A_T}{A_{ДС}} = 1 - \frac{A_T}{A_{ДС}}. \quad (1.64)$$

Відношення  $A_T / A_{ДС} = \psi$  – називають **механічним коефіцієнтом втрат**.

З рівняння (1.64) випливає, що  $\eta < 1$ , тому що у всіх положеннях механізму робота  $A_T \neq 0$ . Із цієї формули виходить також, що  $\eta = 0$ , якщо  $A_T = A_{ДС}$ . Такий режим роботи механізму називають **холостим рухом**.

ККД не може бути меншим нуля, тому що для цього необхідно, щоб виконувалося співвідношення  $A_T / A_{ДС} > 1$  або  $A_{ДС} < A_T$ . Виходить, якщо механізм, який задовольняє останній нерівності, перебуває в спокої, то ніякі рушійні сили не зможуть привести його в рух, що відповідає **самогальмуванню механізму**. Якщо ж механізм перебуває в русі в режимі вибігу, то під дією сил невиробничих опорів (наприклад, сил тертя) він постійно сповільнює свій хід до повної зупинки.

Таким чином, ККД може змінюватися в межах

$$0 \leq \eta < 1. \quad (1.65)$$

З формули (1.64) випливає також, що коефіцієнт втрат  $\psi$  змінюється в межах  $0 < \psi \leq 1$ .

**ККД послідовно з'єднаних механізмів.** Нехай є  $n$  послідовно з'єднаних між собою механізмів (рис. 1.28,б). Перший механізм приводиться в рух рушійними силами, які здійснюють роботу  $A_{ДС}$ . Корисна робота  $A_1$ , яка виконується механізмом I, є роботою рушійних сил другого механізму й т.д. Тоді ККД цих механізмів визначаємо так:

$$\eta_1 = \frac{A_1}{A_{ДС}}, \quad \eta_2 = \frac{A_2}{A_1}, \quad \eta_3 = \frac{A_3}{A_2}, \quad \dots, \quad \eta_n = \frac{A_n}{A_{n-1}}. \quad (1.66)$$

Однак виходячи з визначення, загальний ККД цього ряду механізмів

$$\eta_{об} = \frac{A_n}{A_{ДС}}. \quad (1.67)$$

Перемноживши праві й ліві частини рівнянь (1.66), маємо

$$\eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \eta_3 \cdot \dots \cdot \eta_n = \frac{A_1}{A_{дс}} \cdot \frac{A_2}{A_1} \cdot \frac{A_3}{A_2} \cdot \dots \cdot \frac{A_n}{A_{n-1}} = \frac{A_n}{A_{дс}} . \quad (1.68)$$

Порівнюючи (1.68) і (1.67), отримуємо, що

$$\eta_{об} = \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \eta_3 \cdot \dots \cdot \eta_n . \quad (1.69)$$

Таким чином, загальний ККД послідовно з'єднаних механізмів дорівнює добутку механічних ККД механізмів, які складають одну загальну систему.

Відзначимо, що у всіх формулах даного розділу замість робіт можна використати потужності, тому що останні визначаються роботами за одиницю часу.

**ККД паралельно з'єднаних механізмів.** У сучасних машинах досить часто комбінація механізмів виявляється більш складною, ніж просте послідовне їх з'єднання. На рис. 1.28,б показана схема складного з'єднання механізмів. Потік енергії від механізму 1 розподіляється по трьох напрямках. Загальна робота  $A_{пс} = A_{пс2} + A_{пс3} + A_{пс4}$ . Отже, загальний ККД

$$\eta_{об} = \frac{A_{пс}}{A_{дс}} = \frac{A_{пс2} + A_{пс3} + A_{пс4}}{A_{дс}} . \quad (1.70)$$

Виразимо роботу  $A_{дс}$  через роботи  $A_1, A_2, A_3$ . Оскільки ККД першого механізму  $\eta_1 = \frac{A_1 + A_2 + A_3}{A_{дс}}$ , одержимо

$$A_{дс} = \frac{A_1 + A_2 + A_3}{\eta_1} . \quad (1.71)$$

Беручи до уваги ККД окремих механізмів 2, 3 і 4, запишемо:

$$A_1 = \frac{A_{пс2}}{\eta_2}, \quad A_2 = \frac{A_{пс3}}{\eta_3}, \quad A_3 = \frac{A_{пс4}}{\eta_4} . \quad \text{Тоді вираз (1.71) приймає вигляд}$$

$$A_{дс} = \frac{\eta_3 \cdot \eta_4 \cdot A_{пс2} + \eta_2 \cdot \eta_4 \cdot A_{пс3} + \eta_2 \cdot \eta_3 \cdot A_{пс4}}{\eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \eta_3 \cdot \eta_4} . \quad (1.72)$$

Для загального ККД, беручи до уваги вираз (1.72), на підставі (1.70), одержимо

$$\eta_{об} = \frac{\eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \eta_3 \cdot \eta_4 \cdot (A_{пс2} + A_{пс3} + A_{пс4})}{\eta_3 \cdot \eta_4 \cdot A_{пс2} + \eta_2 \cdot \eta_4 \cdot A_{пс3} + \eta_2 \cdot \eta_3 \cdot A_{пс4}} . \quad (1.73)$$

З формули (1.73) випливає, що загальний коефіцієнт корисної дії в значній мірі залежить від схеми розподілу потоків енергії, яка була прийнята при проектуванні загальної схеми системи механізмів. Помітимо також, що на відміну від послідовного з'єднання механізмів, при їх паралельному з'єднанні для кожного варіанта необхідно виводити вираз загального ККД. Значення загального ККД при цьому залежить не тільки від значень ККД окремих

механізмів, але й від співвідношення корисних робіт. Наприклад, вираз (1.73) можна представити у вигляді

$$\eta_{об} = \frac{k_1 \cdot (1 + x + y)}{k_2 + k_3 \cdot x + k_4 \cdot y}, \quad (1.74)$$

де:  $k_1 = \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \eta_3 \cdot \eta_4$ ;  $k_2 = \eta_3 \cdot \eta_4$ ;  $k_3 = \eta_2 \cdot \eta_4$ ;  $k_4 = \eta_2 \cdot \eta_3$ ;

$x = A_{пс3} / A_{пс2}$ ;  $y = A_{пс4} / A_{пс2}$ .

Досліджуючи залежність (1.74), можна розробляти варіанти з визначення величин  $x$  і  $y$ , при яких значення  $\eta_{об}$  буде більш високим.

#### 1.5.4. Приведення сил і мас у плоских механізмах

Рівняння (1.61) при вивченні динаміки механізмів представляється досить громіздким навіть для плоских механізмів з невеликим числом ланок, внаслідок необхідності виконання підсумовування по  $n$  ланках. Для механізмів з одним ступенем вільності можна одержати більш просту форму цього рівняння, виконавши попередньо всі операції підсумовування.

Замінімо рівняння руху механізму (1.61) тотожним йому рівнянням руху однієї ланки (або однієї точки ланки). Обрана ланка повинна рухатися так, щоб її узагальнена координата збігалася в будь-який момент часу з узагальненою координатою механізму. Назвемо дану ланку **ланкою приведення**. Розглянемо як ланку приведення початкову ланку механізму, яка здійснює обертальний рух з кутовою швидкістю  $\omega$  (рис. 1.29,а).

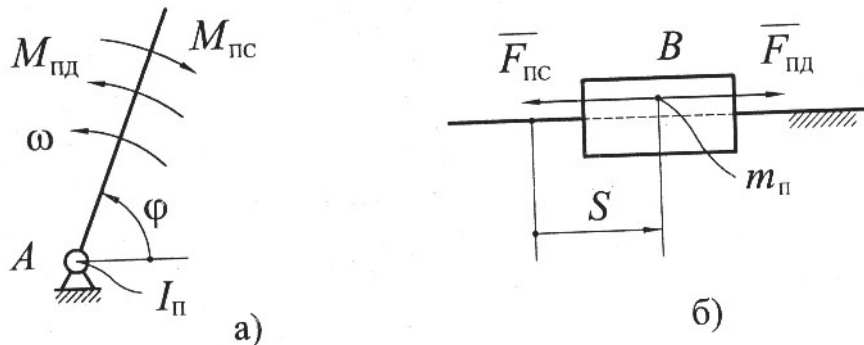


Рис. 1.29 – Динамічні моделі механізмів з одним ступенем вільності

Як узагальнену координату приймемо кут повороту ланки приведення –  $\varphi$ . Позначимо момент інерції цієї ланки відносно осі її обертання –  $I_{п}$  і назвемо його **приведеним моментом інерції**. Приймемо також, що на ланку приведення діє пара сил з моментом  $M_{п}$ , який називається **приведеним моментом зовнішніх сил**

$$M_{\Pi} = M_{\Pi D} - M_{\Pi C}, \quad (1.75)$$

де  $M_{\Pi D}$  й  $M_{\Pi C}$  – приведені до ланки приведення моменти рушійних сил і сил опору відповідно.

Отриману розрахункову схему називають **одномасовою динамічною моделлю механізму**.

Запишемо рівняння руху цієї ланки приведення у формі інтеграла енергії для деякого кінцевого проміжку часу, який відповідає зміні узагальненої координати в межах  $\varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_m$  і зміні приведенного моменту інерції в межах  $I_{\Pi 0} \leq I_{\Pi} \leq I_{\Pi m}$

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi_m} M_{\Pi} d\varphi = \frac{I_{\Pi m} \cdot \omega^2}{2} - \frac{I_{\Pi 0} \cdot \omega_0^2}{2}, \quad (1.76)$$

де:  $\omega$  – кутова швидкість ланки приведення, яка за умовою повинна збігатися з кутовою швидкістю початкової ланки;  $\omega_0$  – значення кутової швидкості цієї ланки при  $\varphi = \varphi_0$ .

Для тотожності рівнянь (1.61) і (1.76) необхідно й достатньо виконання двох умов:

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi_m} M_{\Pi} d\varphi = \sum_{i=1}^n A_i, \quad (1.77)$$

$$\frac{I_{\Pi m} \cdot \omega^2}{2} = \sum_{i=1}^n T_i, \quad (1.78)$$

де  $n$  – число рухливих ланок механізму.

Причому, якщо задовольняється умова (1.78), справедлива для будь-якого моменту часу, то задовольняється й умова для початкового положення

$$\frac{I_{\Pi 0} \cdot \omega_0^2}{2} = \sum_{i=1}^n T_{i0}. \quad (1.79)$$

З рівняння (1.77) знаходимо приведений момент сил  $M_{\Pi}$ , а з рівняння (1.78) – приведений момент інерції  $I_{\Pi}$ .

**Приведеним моментом сил  $M_{\Pi}$  називають момент, умовно прикладений до ланки приведення, який визначається з рівності елементарної роботи (потужності) цього моменту сумі елементарних робіт (потужностей) сил і моментів, які діють на ланки механізму.**

Рівність елементарних робіт сил при стаціонарних геометричних зв'язках означає й рівність їх потужностей

$$M_{\Pi} \cdot \omega = \sum_{i=1}^n P_i, \quad (1.80)$$

де  $P_i$  – потужність сил і пар сил, прикладених до ланки  $i$ .

Припустимо, що на ланку  $i$  діють сила  $\vec{F}_i$  зі швидкістю точки прикладання сили  $\vec{V}_i$ , а також пара сил з моментом  $M_i$ , котрий вважаємо

додатним, якщо його напрямок збігається з напрямком кутової швидкості  $\omega_i$ . Тоді з рівності (1.80) одержуємо формулу для визначення приведенного моменту сил

$$M_{\Pi} = \frac{1}{\omega} \sum_{i=1}^n [F_i \cdot V_i \cdot \cos \alpha_i + M_i \cdot \omega_i], \quad (1.81)$$

де  $\alpha_i$  – кут між векторами  $\vec{F}_i$  й  $\vec{V}_i$ .

Формула (1.81) справедлива як для рушійних сил, так і для сил опору. Приведений момент може бути й додатний і від'ємний. Позитивне значення моменту означає, що його напрямок збігається з кутовою швидкістю ланки приведення, знак мінус – що приведений момент спрямований проти кутової швидкості цієї ланки.

З рівняння (1.78) випливає, що **приведений момент інерції  $I_{\Pi}$  – це момент інерції, яким володіє ланка приведення відносно осі її обертання, кінетична енергія якої повинна дорівнювати сумі кінетичних енергій всіх ланок механізму.**

При плоскому русі кінетичну енергію  $i$ -ої ланки визначають за формулою

$$T_i = 0,5 \cdot (m_i \cdot V_{s_i}^2 + I_{s_i} \cdot \omega_i^2), \quad (1.82)$$

де  $m_i$  – маса  $i$ -ої ланки,  $V_{s_i}$  – швидкість центра мас (точки  $s_i$ ) цієї ланки,  $\omega_i$  – кутова швидкість цієї ланки;  $I_{s_i}$  – момент інерції цієї ланки відносно осі, яка проходить через центр мас, перпендикулярно площині руху.

На підставі (1.78) з урахуванням (1.82) для визначення приведенного моменту інерції одержимо вираз

$$I_{\Pi} = \sum_{i=1}^n \left[ m_i \cdot \left( \frac{V_{s_i}}{\omega} \right)^2 + I_{s_i} \cdot \left( \frac{\omega_i}{\omega} \right)^2 \right]. \quad (1.83)$$

Якщо ланка приведення здійснює прямолінійний поступальний рух зі швидкістю  $\vec{V}$ , то динамічна модель механізму являє собою матеріальну точку з масою  $m_{\Pi}$  (**приведена маса**), котра рухається під дією сили  $F_{\Pi} = F_{\Pi d} - F_{\Pi c}$ , яка називається **приведеною силою** (рис. 1.29,б). Формули для визначення приведеної сили й приведеної маси мають вигляд, аналогічний формулам (1.81) і (1.83):

$$F_{\Pi} = \frac{1}{V} \cdot \sum_{i=1}^n [F_i \cdot V_i \cdot \cos \alpha_i + M_i \cdot \omega_i], \quad (1.84)$$

$$m_{\Pi} = \sum_{i=1}^n \left[ m_i \cdot \left( \frac{V_{s_i}}{V} \right)^2 + I_{s_i} \cdot \left( \frac{\omega_i}{V} \right)^2 \right]. \quad (1.85)$$

У загальному випадку, для побудови динамічної моделі механізму за точку приведення приведеної маси можна вибрати будь-яку точку будь-якої рухливої ланки механізму. Тоді **приведеною масою  $m_{\Pi}$  механізму називають масу, яка зосереджується в обраній точці механізму (точка приведення),**

причому кінетична енергія цієї матеріальної точки повинна дорівнювати сумі кінетичних енергій всіх ланок механізму. Відповідно, приведеною силою  $F_{\pi}$  називають силу, умовно прикладену до точки приведення, яка визначається з рівності елементарної роботи (потужності) цієї сили сумі елементарних робіт (потужностей) сил і пар сил, які діють на ланки механізму.

З аналізу виразів (1.81), (1.83) і (1.84), (1.85) випливає, що приведені сили й моменти сил, маси й моменти інерції не залежать від значення швидкостей ланок приведення  $V$  або  $\omega$ , тому що в ці формули входять відношення швидкостей, які залежать тільки від положення механізму. Дійсно, якщо  $V$  або  $\omega$  змінюються в  $k$  раз, то в стільки ж раз змінюються значення величин  $V_{si}$  і  $\omega_i$ , тобто відношення швидкостей не змінюється. Звідси виходить, що визначення приведених сил і мас, моментів сил і моментів інерції, можна виконати, не знаючи швидкості ланки приведення. У цьому полягає основне достоїнство приведення сил і мас або моментів сил і моментів інерції.

Приведена маса може бути змінною величиною, тому що відношення швидкостей змінне й залежить від положення механізму. Однак точку приведення зі змінною приведеною масою не можна розглядати як модель тіла змінної маси. Зміна приведеної маси відображає лише зміну кінетичної енергії ланок механізму з постійними масами.

### 1.5.5. Диференціальне рівняння руху механізму

Крім рівняння руху механізму у формі кінетичної енергії (1.61) у деяких випадках зручно використовувати рівняння руху механізму у вигляді **диференціального рівняння другого порядку**. Таке рівняння можна одержати з рівняння кінетичної енергії в диференціальній формі

$$dA = dT, \quad (1.86)$$

де елементарна робота  $dA = M_{\pi} \cdot d\phi$ , а приріст кінетичної енергії  $dT = d(I_{\pi} \cdot \omega^2 / 2)$ .

З урахуванням останніх викладених залежностей на підставі виразу (1.86)

запишемо  $\frac{d}{d\phi} \left( \frac{I_{\pi} \cdot \omega^2}{2} \right) = M_{\pi}$ . Звідси  $\omega \cdot \frac{d\omega}{d\phi} \cdot I_{\pi} + \frac{1}{2} \cdot \omega^2 \cdot \frac{dI_{\pi}}{d\phi} = M_{\pi}$ , або

$$\omega \cdot \frac{d\omega}{d\phi} \cdot I_{\pi} + \frac{1}{2} \cdot \omega^2 \cdot \frac{dI_{\pi}}{d\phi} = M_{\pi}. \quad \text{З огляду на те, що } \frac{d\phi}{dt} = \omega = \dot{\phi}, \quad \frac{d\omega}{dt} = \varepsilon = \ddot{\phi}$$

остаточно одержимо 
$$I_{\pi} \cdot \ddot{\phi} + \frac{1}{2} (\dot{\phi})^2 \cdot \frac{dI_{\pi}}{d\phi} = M_{\pi}. \quad (1.87)$$

Якщо ланка приведення є матеріальною точкою з масою  $m_{\Pi}$ , то беручи до уваги, що  $dA = F_{\Pi} \cdot dS$ , а  $dT = d\left(\frac{m_{\Pi} \cdot V^2}{2}\right)$  одержимо диференціальне рівняння

$$m_{\Pi} \cdot \ddot{S} + \frac{1}{2}(\dot{S})^2 \cdot \frac{dm_{\Pi}}{dS} = F_{\Pi} . \quad (1.88)$$

Диференціальні рівняння руху механізму (1.87) і (1.88) можна одержати також з **рівняння Лагранжа другого роду**, яке після приведення сил і мас, у випадку, коли ланка приведення здійснює обертальний рух, має вигляд

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \omega} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = M_{\Pi} , \quad (1.89)$$

де, як і раніше  $T = I_{\Pi} \cdot \omega^2 / 2$ .

Диференціюємо складові цього рівняння:

$$\frac{\partial T}{\partial \omega} = \omega \cdot I_{\Pi} ;$$

$$\frac{d}{dt}(\omega \cdot I_{\Pi}) = I_{\Pi} \frac{d\omega}{dt} + \frac{dI_{\Pi}}{dt} \omega = I_{\Pi} \cdot \ddot{\varphi} + \frac{dI_{\Pi}}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} \cdot \omega = I_{\Pi} \cdot \ddot{\varphi} + \dot{\varphi}^2 \cdot \frac{dI_{\Pi}}{d\varphi} ;$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = \frac{\omega^2}{2} \cdot \frac{dI_{\Pi}}{d\varphi} = \frac{\dot{\varphi}^2}{2} \cdot \frac{dI_{\Pi}}{d\varphi} .$$

Підставляючи отримані вирази похідних у рівняння Лагранжа (1.89), знову одержуємо рівняння (1.87).

У диференціальні рівняння руху механізму (1.87), (1.88) у праву частину входить приведений момент  $M_{\Pi}$  або приведена сила  $F_{\Pi}$ . Ці параметри можуть бути функціями узагальненої координати  $\varphi$  або її першій похідній  $\dot{\varphi} = \omega$ , або, нарешті, часу  $t$ . Якщо приведені моменти  $M_{\Pi d}$  і  $M_{\Pi c}$  є функціями однієї й цієї ж змінної, то диференціальні рівняння руху приймають вигляд:

$$M_{\Pi}(\varphi) = M_{\Pi d}(\varphi) - M_{\Pi c}(\varphi) = I_{\Pi} \cdot \frac{d\omega}{dt} + \frac{1}{2} \omega^2 \cdot \frac{dI_{\Pi}}{d\varphi} , \quad (1.90)$$

$$M_{\Pi}(\omega) = M_{\Pi d}(\omega) - M_{\Pi c}(\omega) = I_{\Pi} \cdot \frac{d\omega}{dt} + \frac{1}{2} \omega^2 \cdot \frac{dI_{\Pi}}{d\varphi} , \quad (1.91)$$

$$M_{\Pi}(t) = M_{\Pi d}(t) - M_{\Pi c}(t) = I_{\Pi} \cdot \frac{d\omega}{dt} + \frac{1}{2} \omega^2 \cdot \frac{dI_{\Pi}}{d\varphi} , \quad (1.92)$$

тобто в цих рівняннях приведені моменти є функціями параметрів  $\varphi$ ,  $\omega$  і  $t$ . Однак не менш часто зустрічаються задачі, коли приведені моменти від рушійних сил і від сил опору є функціями різних змінних, наприклад  $M_{\Pi d} = M_{\Pi d}(\varphi)$ , а  $M_{\Pi c} = M_{\Pi c}(t)$  й т.п. Диференціальні рівняння руху при цьому будуть нелінійними й вирішити їх можна тільки наближеними методами.



Неважко бачити, що тільки рівняння (1.90) може бути вирішено, і то у квадратурах, а не в кінцевому вигляді.

Нехай приведений момент  $M_{\pi}$  заданий як функція узагальненої координати  $\varphi$  (кут повороту початкової ланки). Нехай приведений момент інерції  $I_{\pi}$ , визначений формулою (1.83), також є функцією кута  $\varphi$ . Тоді для визначення закону руху початкової ланки зручно користуватися рівнянням (1.86). Маємо  $M_{\pi} \cdot d\varphi = d(I_{\pi} \cdot \omega^2 / 2)$ , звідки одержимо

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi_i} M_{\pi} d\varphi = \frac{I_{\pi i} \cdot \omega_i^2}{2} - \frac{I_{\pi 0} \cdot \omega_0^2}{2}, \quad (1.93)$$

де  $I_{\pi i}, \omega_i$  – приведений момент інерції й кутова швидкість ланки приведення в положенні  $i$ ;  $I_{\pi 0}, \omega_0$  – приведений момент інерції й кутова швидкість ланки приведення в початковому положенні.

Визначимо з рівняння (1.93) кутову швидкість  $\omega_i$  ланки приведення в  $i$ -тому положенні механізму, при відомій його початковій кутовій швидкості  $\omega_0$  (якщо дослідження механізму машинного агрегату починається з пуску, то кутова швидкість  $\omega_0 = 0$ ). Маємо

$$\omega_i = \sqrt{\frac{2}{I_{\pi i}} \cdot \int_{\varphi_0}^{\varphi_i} M_{\pi} d\varphi + \frac{I_{\pi 0}}{I_{\pi i}} \cdot \omega_0^2}. \quad (1.94)$$

З формули (1.94) можна визначити функцію  $\omega = \omega(\varphi)$ . Для визначення часу  $t$  руху механізму використовуємо вираз  $d\varphi/dt = \omega(\varphi)$ , після інтегрування якого одержимо

$$t = t_0 + \int_{\varphi_0}^{\varphi_i} \frac{1}{\omega(\varphi)} d\varphi. \quad (1.95)$$

Якщо дослідження руху механізму ведеться з початку пуску, то  $t_0 = 0$ . У такий спосіб ми одержали дві функції  $\omega = \omega(\varphi)$  й  $t = t(\varphi)$ . Виключаючи з них кут  $\varphi$ , одержимо функцію  $\omega = \omega(t)$  – залежність кутової швидкості ланки приведення від часу, а, у свою чергу, інтегруючи цю залежність, одержимо шукану функцію  $\varphi = \varphi(t)$ . Для визначення кутового прискорення цієї ланки

$$\text{маємо } \varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\omega}{d\varphi} \cdot \omega.$$

Указаний шлях визначення функції  $\varphi = \varphi(t)$  неможливий, якщо  $\omega_0 = 0$ , тоді на ділянці від  $\varphi = \varphi_0$  до  $\varphi = \varphi_i$  застосовуємо диференціальне рівняння (1.87). Із цього рівняння при  $\varphi = \varphi_0$  й  $\omega_0 = 0$  одержимо

$$\varepsilon(\varphi_0) = M_{\pi}(\varphi_0) / I_{\pi}(\varphi_0).$$

При досить малому прирості  $\Delta t$  для обчислення  $\omega_1$  й  $\varphi_1$ , тобто параметрів наступної точки функції  $\varphi(t)$ , застосовуємо формули рівноприскореного руху:  $\omega_1 = \varepsilon(\varphi_0) \cdot \Delta t$ ,  $\varphi_1 = \varphi_0 + \varepsilon(\varphi_0) \cdot \frac{\Delta t^2}{2}$ .

Далі можна обчислити інтеграл у виразі (1.95) у межах від  $\varphi_1$  до  $\varphi_i$ , або ж продовжити рішення диференціального рівняння (1.87) будь-яким чисельним методом.

### 1.5.6. Коефіцієнт нерівномірності руху механізму

Однією з кінематичних характеристик усталеного руху механізму є **коефіцієнт нерівномірності руху механізму**  $\delta$ , під яким розуміють відношення різниці максимального й мінімального значення кутової швидкості початкової ланки до її середнього значення за один цикл сталого руху

$$\delta = \frac{\omega_{\max} - \omega_{\min}}{\omega_{cp}}, \quad (1.96)$$

де 
$$\omega_{cp} = \frac{\omega_{\max} + \omega_{\min}}{2}.$$

Практикою установлені деякі, дуже широкі, інтервали допустимих значень  $\delta$  для механізмів різних типів машин. Наприклад, для насосів приймають  $\delta = 1/5 \dots 1/30$ , для сільгоспмашин  $\delta = 1/5 \dots 1/50$ , для металообробних верстатів  $\delta = 1/20 \dots 1/50$ , для суднових двигунів  $\delta = 1/20 \dots 1/150$ , для авіаційних двигунів  $\delta = 1/200$  і менше, для електричних генераторів змінного струму  $\delta = 1/200 \dots 1/300$  і т.д.

### 1.5.7. Регулювання періодичних коливань кутової швидкості початкової ланки

Якщо коефіцієнт нерівномірності руху  $\delta$ , підрахований за формулою (1.96) виявився більше допустимого, то його можна зменшити шляхом збільшення маси однієї з обертальних ланок. **Додаткову масу обертальної ланки, призначену для забезпечення заданого коефіцієнта нерівномірності руху механізму, називають маховою масою.** Конструктивно така маса може бути виконана як **маховик**, тобто деталь у вигляді суцільного диска або шківів з важким ободом і спицями.

Необхідний момент інерції маховика можна визначити, наприклад, методом Віттенбауера [4, 5].

## 2. ОСНОВИ РОЗРАХУНКІВ ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ НА МІЦНІСТЬ, ЖОРСТКІСТЬ І СТІЙКІСТЬ

### 2.1. Задачі та основні поняття опору матеріалів

Першою стадією створення машини, приладу або споруди є проектування, у процесі якого розрахунковим шляхом визначають розміри окремих елементів конструкції.

**Опір матеріалів** вивчає основні закономірності, що зв'язують зовнішні навантаження на елементи конструкцій механізмів і машин з виникаючими в них при цьому внутрішніми зусиллями і деформаціями; механічні властивості конструкційних матеріалів і зміну цих властивостей в залежності від характеру силових навантажень, температурного і інших факторів.

В даному розділі розглянуті внутрішні силові фактори і напруження, які виникають в стрижнях при простих видах опору, геометричні характеристики перерізів, викладені розрахунки стрижнів круглих перерізів при згинанні з крученням, особливості розрахунків на стійкість стиснутих стрижнів.

У процесі експлуатації машин і механізмів елементи конструкцій у результаті дії на них зовнішніх сил у той чи інший мірі змінюють свої форму і розміри, тобто *деформуються*. Вивчення деформацій дозволяє визначити умови, при яких можливі руйнування елемента конструкції або недопустимі зміни форми і розміру.

Основними задачами науки про опір матеріалів є викладання методів розрахунків елементів конструкції на міцність, жорсткість, стійкість.

**Міцність** – здатність елементів конструкцій не руйнуватися при зовнішньому навантаженні.

У багатьох випадках виникає потреба обмежувати величину деформації твердого тіла при навантаженні, незважаючи на малу величини деформації у порівнянні з розмірами тіла.

**Жорсткість** – здатність конструкції та її елементів чинити опір зміні форми та розмірів.

**Стійкість** – здатність елемента конструкції зберігати початкову форму пружної рівноваги.

Розрахунки на стійкість необхідні, наприклад, для вертикально стиснутих конструктивних елементів при малих змінах навантаження. В таких випадках втрата стійкості можлива при навантаженнях, безпечних з точки зору міцності і жорсткості елемента.

Методи розрахунків різноманітних елементів конструкцій споруд і машин, які вивчає наука про опір матеріалів, призводять до забезпечення міцності, жорсткості і стійкості конструкцій при отриманні їх оптимальних розмірів і економічних характеристик.

**Розрахунковою схемою** називають реальний об'єкт, звільнений від неістотних особливостей.

При вивченні опору матеріалів активні **зовнішні сили** – сили, які викликані дією інших тіл – називають *навантаженням*.

За способом прикладання навантаження розподіляють на *зосереджене* (сила  $P$  або пара сил – момент  $M$ ), яке умовно прикладене у точці, та *розподілене*.

До розподілених відносять навантаження, розподілене по довжині, площі, або по об'єму (сили ваги, сили інерції та ін.). Характеристикою розподіленого навантаження є інтенсивність  $q$ , розмірність якої може бути: Н/м, Н/м<sup>2</sup>, Н/м<sup>3</sup> відповідно розподіленню. Розподілене навантаження при розрахунках може бути замінено рівнодійною зосередженою силою.

За характером дії на елементи конструкції навантаження розділяють на *статичні* та *динамічні*. Статичні навантаження змінюють точку прикладання або свій напрям зі зневажливо малою швидкістю. Для розрахунків їх вважають сталими. Динамічні навантаження змінюються з великою швидкістю. Динамічні навантаження розподіляють на: *миттєво-прикладені*, *ударні*, *повторно-змінні (циклічні)*. Наявність і характер динамічних навантажень для конструкції потрібно обов'язково враховувати; їх величина може багаторазово перевищувати статичні навантаження.

**Пружність** – це властивість твердих матеріалів повертатися у початкову форму при **пружній деформації**. Пружні деформації зникають після розвантаження.

**Пластичні (залишкові) деформації** – це деформації, які залишаються після розвантаження.

Опір тіл діючим на них зовнішнім навантаженням обумовлений наявністю у тілах внутрішніх сил, які прагнуть зберегти тіло як єдине ціле та протидіють деформуванню. *Предметом вивчення опору матеріалів є внутрішні сили (сили пружності)*.

**Внутрішні сили** – сили взаємодії між суміжними частинами тіла, величина яких характеризує здатність тіл чинити опір зовнішнім навантаженням.

Різноманітність видів **елементів конструкцій** зведено до декількох типових форм: стрижні, оболонки і масивні тіла.

**Стрижень (брус)** – тіло, один з розмірів якого (довжина) значно перевищує два інші (поперечні) розміри (балки, осі, вали та ін.). Зустрічаються стрижні з прямолінійними, криволінійними осями (вісь  $S$ ) (рис 2.1).

Стрижні можуть бути постійного та змінного поперечного перерізу (змінні форма і величина площі перерізу  $F$ ).

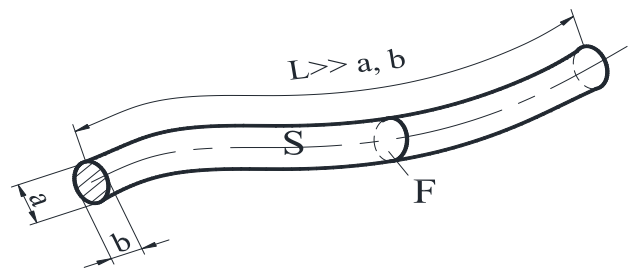


Рис. 2.1

**Оболонка** являє собою тіло, обмежене двома криволінійними поверхнями, розташованими на близькій відстані одна від одної (резервуари,

корпуси, котли та ін.). (рис. 2.2). Геометричне місце точок оболонки, рівновіддалених від її обох поверхонь, називають *серединною поверхнею*. За формою серединної поверхні розрізняють оболонки циліндричні, сферичні, конічні та інші. Якщо серединна поверхня є площиною, то така оболонка називається *пластиною* (перекриття споруд, диски, кришки резервуарів та ін.).

**Масивним** називають тіло, у якого всі три розміри – величини одного порядку (фундаменти споруд, станини та ін.) (рис. 2.3).

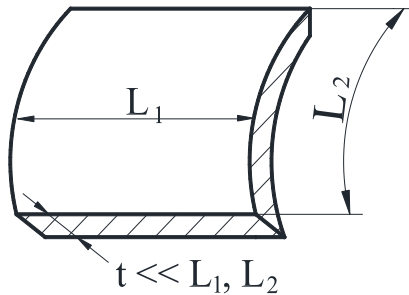


Рис. 2.2

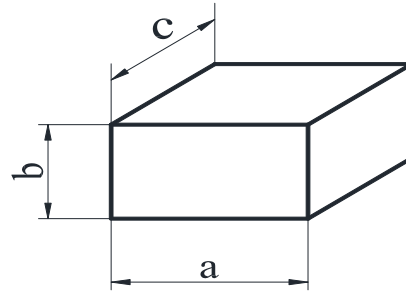


Рис. 2.3

У теорії опору матеріалів прийняті ряд гіпотез про структуру та властивості матеріалів, а також характери деформацій.

Розглянемо деякі з **основних гіпотез опору матеріалів**:

1. *Гіпотеза про суцільність матеріалу*. Матеріал суцільно заповнює відведений йому об'єм.
2. *Гіпотеза про однорідність і ізотропність*. Матеріал вважається однорідним та ізотропним, якщо в будь-якому об'ємі та в будь-якому напрямі його фізико-механічні властивості однакові.
3. *Гіпотеза про малість деформації*. Припускають, що деформації малі у порівнянні з розмірами деформовного тіла.
4. *Гіпотеза плоских перерізів*. Мислено проведені плоскі перерізи, перпендикулярні осі стрижня, у процесі деформування залишаються плоскими та перпендикулярними до осі.

## 2.2 Метод перерізів при визначенні внутрішніх силових факторів

Для визначення внутрішніх сил використовується *метод перерізів*.

Розглянемо пружний прямий стрижень, який перебуває під дією зовнішніх сил у рівновазі (рис 2.4.а) [8]. Розсічемо умовно цей брус площиною  $H$  на дві частини I і II. Відкинемо одну з частин, наприклад II, і розглянемо умови рівноваги частини I, яка залишилася. Дія відкинutoї частини II на частину I замінюється внутрішніми силами (рис 2.4.б). Ці внутрішні сили, розподілені у зробленому перерізі, можна в загальному випадку привести до головного вектора  $\bar{R}$  і головного моменту  $\bar{M}$  (рис 2.4.в).

Вводимо декартову систему координат  $Oxyz$ , де  $x$  – поздовжня вісь бруса, а осі  $y, z$  належать до площини поперечного перерізу бруса. Розкладемо вектори

$\bar{R}$  і  $\bar{M}$  на складові по осях  $x, y, z$ . Проекції позначимо:  $N, Q_y, Q_z$  та  $M_k, M_y, M_z$  (рис 2.4.г).

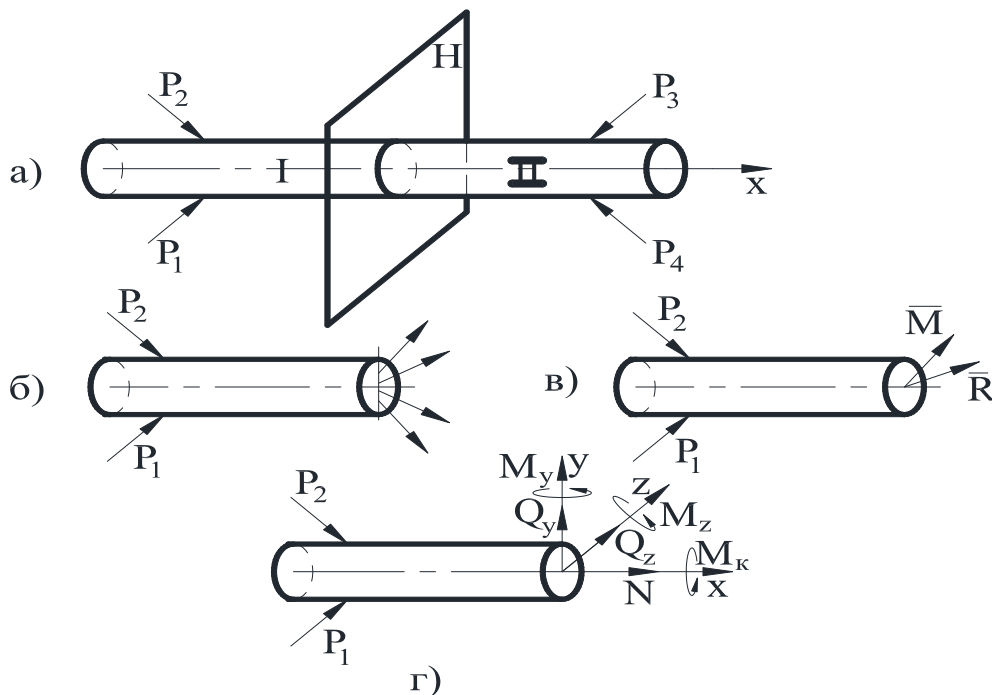


Рис.2.4

**Внутрішні зусилля**, які діють у поперечному перерізі стрижня, називають:  $N$  – поздовжня сила;  $Q_y, Q_z$  – поперечні сили;  $M_k$  – крутний момент;  $M_y, M_z$  – згинальні моменти. Внутрішні зусилля визначають з рівнянь статки (6 умов рівноваги), записаних для I частини бруса.

**Прості види опору стрижня (бруса)** – розтягання-стискання, кручення, чисте пряме згинання. Кількість внутрішніх зусиль у довільному поперечному перерізі залежить від зовнішнього навантаження на об'єкт. Види опору відповідні таким внутрішнім силам: осьове розтягання-стискання –  $N$ ; зсув –  $Q_y, Q_z$ ; кручення –  $M_k$ , чисте пряме згинання –  $M_y$ , або  $M_z$ .

**Складним опором** називають різні комбінації простих видів опору.

### 2.2.1. Визначення внутрішніх зусиль, побудова епюр

Внутрішні зусилля одного і того ж стрижня у різних перерізах відрізняються. Графіки, що показують як змінюються внутрішні зусилля по довжині стрижня (від координати  $x$ ), називають **епюрами внутрішніх зусиль**.

Брус працює на осьове розтягання-стискання, якщо в довільному його поперечному перерізі виникає тільки поздовжня сила  $N$ .

**Поздовжня сила  $N$**  – це проекція на поздовжню вісь  $x$  бруса головного вектора  $\bar{R}$  внутрішніх сил пружності, які розподілені в поперечному перерізі бруса, і чисельно дорівнює алгебраїчній сумі проекцій на цю саму вісь  $x$  усіх зовнішніх зусиль, які прикладені по один бік від цього поперечного перерізу.

Епюра  $N$  – графік залежності поздовжньої сили від координати  $x$ . Площу, обмежену графіком і віссю  $x$ , заштриховують вертикально, підкреслюючи зміну значення сили  $N$  по довжині стрижня.

Правило знаків  $N$  наведено на рис. 2.5.

Приклад розрахунку епюри поздовжньої сили  $N(x)$  для наведеної на рис.2.6 розрахункової схеми бруса:

$$N(0)_+ = -10 \text{ кН},$$

$$N(1)_+ = -10 + 32 = 22 \text{ кН},$$

$$N(2)_+ = -10 + 32 - 15 = 7 \text{ кН}.$$



Рис. 2.5

Заданий брус розподілений по довжині на три ділянки по точках прикладання зовнішніх сил.

В дужках наведено значення текучої координати  $x$ , пов'язаної з

довжиною балки. Підрядковим знаком «плюс» або «мінус» позначають, що розрахунок виконується для поперечного перерізу бруса, розташованого відповідно праворуч або ліворуч, але нескінченно близько до межі ділянки бруса. [8]

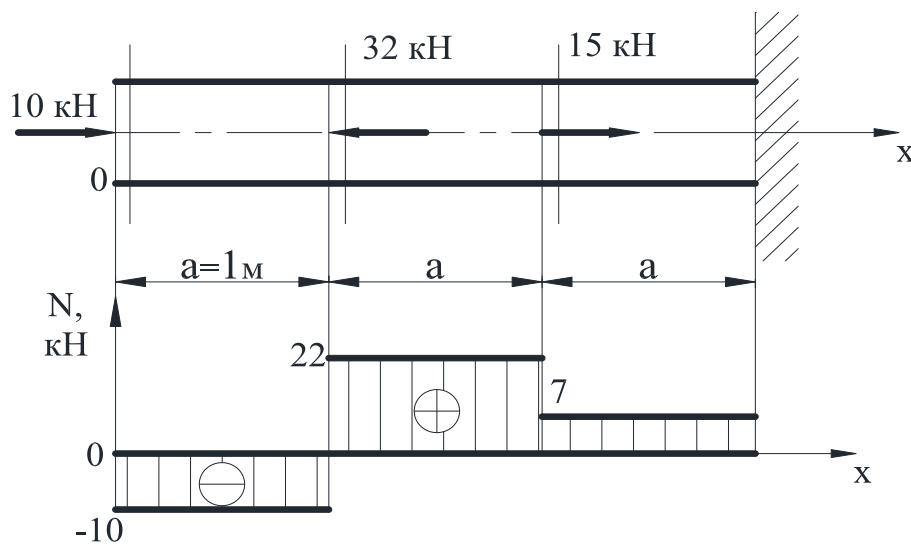


Рис. 2.6

Розглянемо ще один приклад розрахунку епюри поздовжньої сили  $N$  при наявності зовнішнього розподіленого навантаження інтенсивністю  $q$  (на другій ділянці стрижня) і побудуємо відповідну епюру (рис. 2.7):

$$N(3)_- = 20 \text{ кН}; \quad N(1)_- = 20 - 30 \cdot 1 = -10 \text{ кН}.$$

Якщо зовнішнє навантаження на прямолінійний стрижень (вал) складається тільки з моментів  $M_i$  ( $i=1,2,\dots$ ), площини яких перпендикулярні до поздовжньої осі валу – скручувальних моментів, то у довільному поперечному перерізі виникає лише крутний момент  $M_k$ .

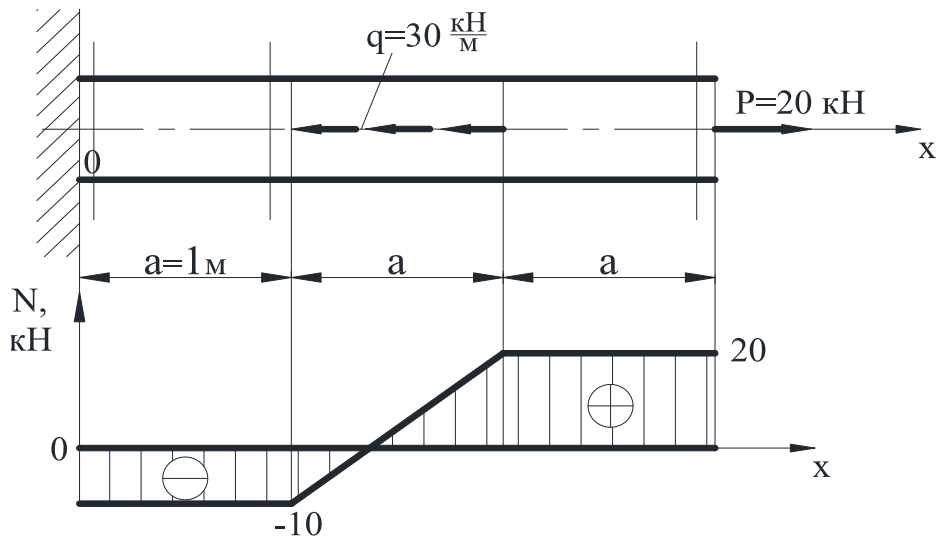


Рис.2.7

Рис. 2.7

**Крутний момент  $M_k$**  – це проекція на поздовжню вісь  $x$  стрижня головного моменту  $\bar{M}$  внутрішніх сил пружності, які розподілені в поперечному перерізі стрижня і чисельно дорівнює алгебраїчній сумі моментів відносно цієї самої осі  $x$  усіх зовнішніх зусиль, що прикладені по один бік від цього поперечного перерізу.

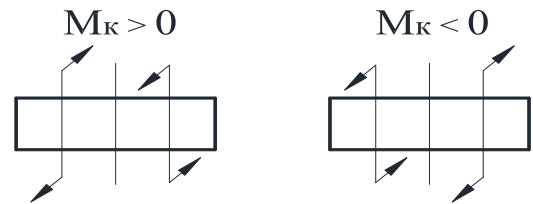


Рис.2.8

Правило знаків  $M_k$  наведено на рис. 2.8.

Приклад розрахунку і побудови епюри крутного моменту  $M_k$  (рис.2.9):

$$\dot{I}_{\epsilon}(0)_{+} = 20 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad \dot{I}_{\epsilon}(2) = 20 - 40 \cdot 1 = -20 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

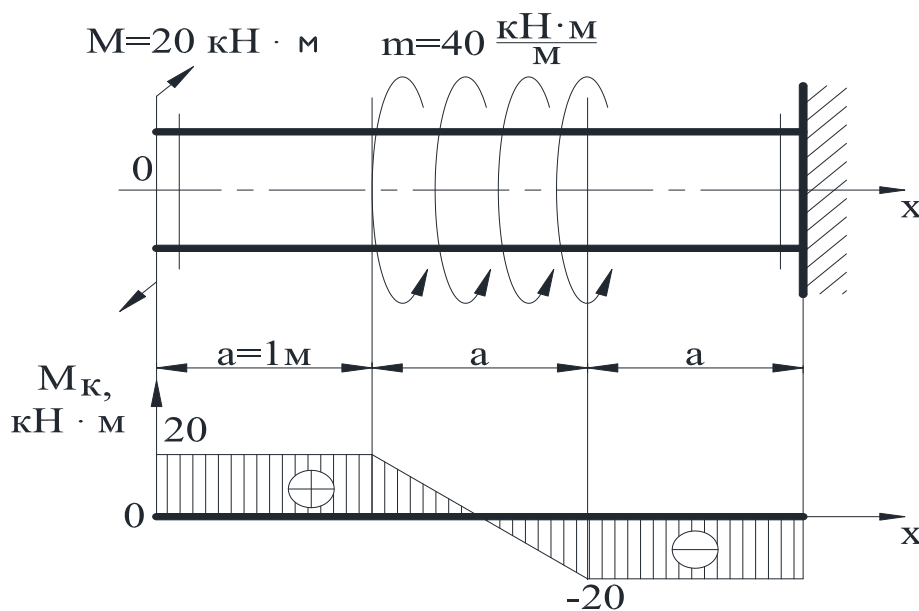


Рис.2.9



Прямолінійні стрижні, які працюють на згинання, будемо називати *балками*. При чистому прямому згинанні у довільному поперечному перерізі балки виникає тільки згинальний момент  $M_z$ , а при поперечному згинанні у вертикальній площині – два внутрішніх силових фактори: поперечна сила  $Q_y$  та згинальний момент  $M_z$ .

**Поперечна сила  $Q_y$**  – це проекція на поперечну вісь  $y$  головного вектора  $\bar{R}$  внутрішніх сил пружності, які розподілені в поперечному перерізі балки і чисельно дорівнює алгебраїчній сумі проекцій на цю саму вісь  $y$  усіх зовнішніх сил, що прикладені по один бік від цього поперечного перерізу балки.

Правило знаків  $Q_y$  наведено на рис. 2.10.

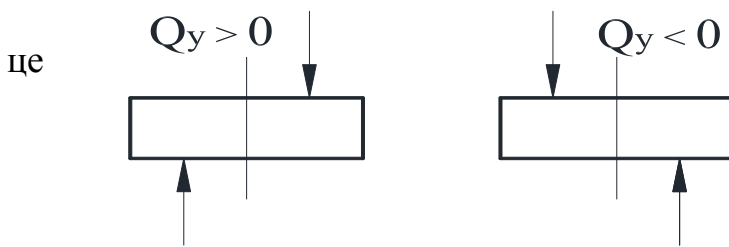


Рис. 2.10



Рис.2.11

**Згинальний момент  $M_z$**  – проекція на поперечну вісь  $z$  балки головного моменту  $\bar{I}$  внутрішніх сил пружності, які розподілені в поперечному перерізі балки і чисельно дорівнює алгебраїчній сумі моментів відносно цієї самої осі  $z$  усіх зовнішніх зусиль, що прикладені по один бік від цього поперечного перерізу балки.

Правило знаків  $M_z$  наведено на рис.2.11.

Встановлюємо

*диференціальні залежності* між згинальним моментом  $M_z$ , поперечною силою  $Q_y$  і інтенсивністю розподіленого навантаження  $q$ .

Розглянемо балку (рис.2.12), яка знаходиться під дією розподіленого навантаження інтенсивністю  $q(x)$ . З умов рівноваги малого елемента балки одержимо

$$\frac{dM_z(x)}{dx} = Q_y(x), \quad (2.1)$$

$$\frac{dQ_y(x)}{dx} = q(x). \quad (2.2)$$

З диференціальних залежностей (2.1), (2.2) випливає третя диференціальна залежність

$$\frac{d^2 M_z(x)}{dx^2} = q(x). \quad (2.3)$$

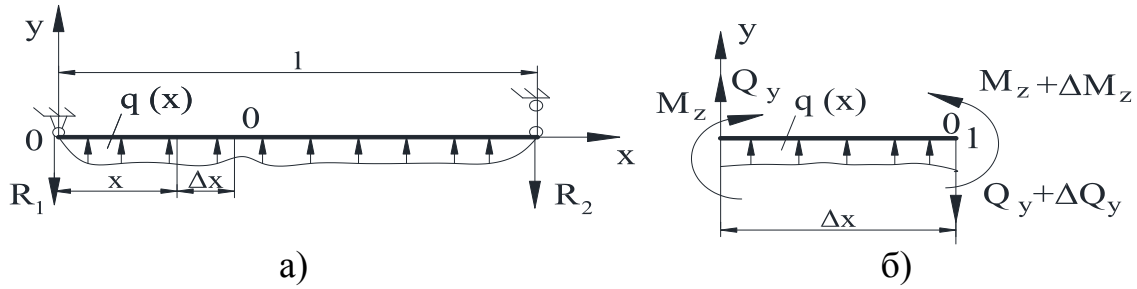


Рис. 2.12

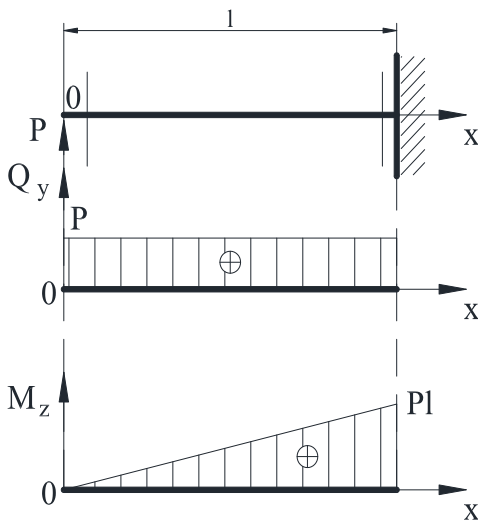


Рис. 2.13

Приклади побудови епюр  $Q_y$  і  $M_z$ :  
1. Побудувати епюри  $Q_y$  і  $M_z$  для консольної балки (рис.2.13).

$$Q_y(0)_+ = P;$$

$$M_z(0)_+ = 0; M_z(l)_- = Pl.$$

2. Побудувати епюри  $Q_y$  і  $M_z$  для консольної балки (рис.2.14).

$$Q_y(0)_+ = q \cdot l; Q_y(l)_- = 0;$$

$$M_z(0)_+ = -\frac{ql^2}{2}; M_z(l)_- = 0.$$

3. Побудувати епюри  $Q_y$  і  $M_z$  для балки на шарнірних опорах (рис.2.15).

Система симетрична, тому

$$R_1 = R_2 = \frac{P}{2}$$

$$Q_y(0)_+ = \frac{P}{2}; Q_y\left(\frac{l}{2}\right)_+ = -\frac{P}{2}$$

$$M_z(0)_+ = 0; M_z\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{P}{2} \cdot \frac{l}{2} = \frac{Pl}{4};$$

$$M_z(l)_- = 0.$$

4. Побудувати епюри  $Q_y$  і  $M_z$  для балки на шарнірних опорах (рис.2.16).

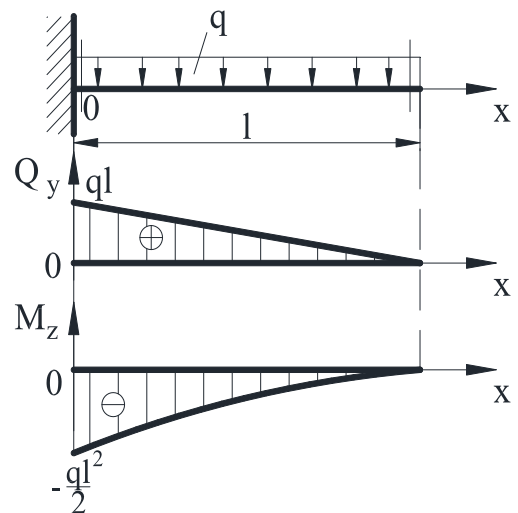


Рис.2.14

$$Q_y(0)_+ = \frac{ql}{2}; Q_y(l)_- = -\frac{ql}{2};$$

$$M_z(0)_+ = M_z(l)_- = 0; \quad M_z\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{ql}{2} \cdot \frac{l}{2} - q \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{4} = \frac{ql^2}{8}$$

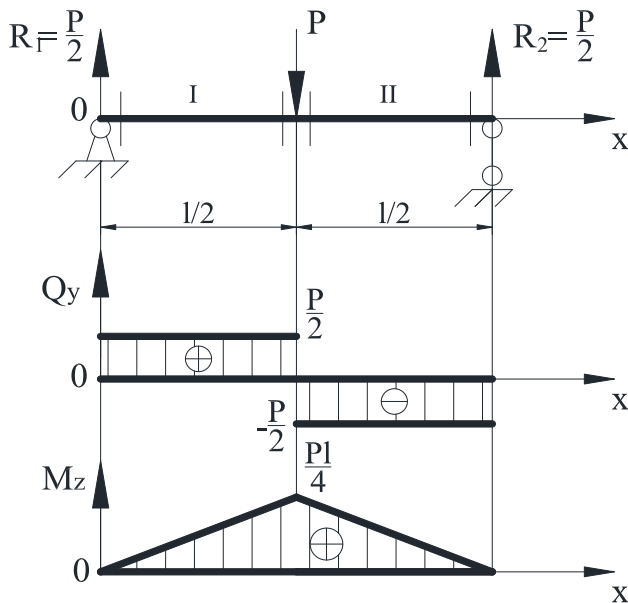


Рис.2.15

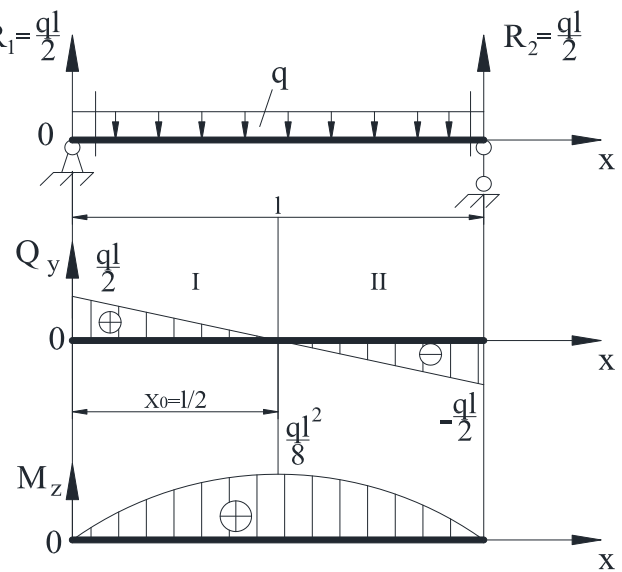


Рис.2.16

### 2.3. Поняття про напруження і деформації

**Напруження** є мірою інтенсивності внутрішніх сил, тобто напруженням називається внутрішня сила, віднесена до одиниці площі в даній точці розглянутого перерізу.

У перерізі виділяємо елементарну площадку  $\Delta F$ . Коли внутрішня сила розподіляється по перерізу нерівномірно, під повним напруженням  $\bar{\sigma}$  у даній точці перерізу слід розуміти границю відношення внутрішнього зусилля  $\Delta R$  до  $\Delta F$ , якщо  $\Delta F$  прямує до нуля, тобто 
$$\bar{\sigma} = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\Delta R}{\Delta F}$$

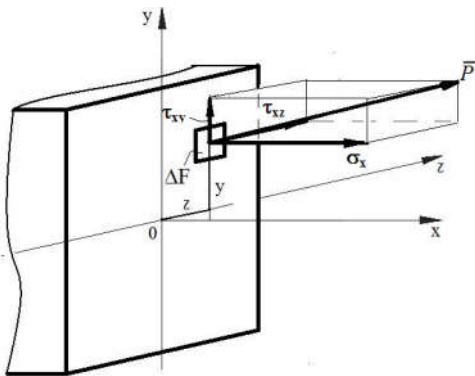


Рис. 2.17

Повне напруження  $\bar{\sigma}$  можна розкласти на три складові (рис. 2.17): складову, нормальну до виділеної площадки – **нормальні напруження**  $\sigma_{\delta}$  і складові, дотичні до цієї площадки – **дотичні напруження**  $\tau_{\delta o}, \tau_{xz}$ :

$$\sigma_x = \frac{dN}{dF}; \quad \tau_{xy} = \frac{dQ_y}{dF}; \quad \tau_{xz} = \frac{dQ_z}{dF}$$

Напруження на даній площадці є вектори, напрям яких співпадає з напрямом зусиль. Розмірність напруження –  $\text{Н/м}^2$ ; Па.

Сукупність нормальних і дотичних напружень по різних площадках, які містять в собі дану точку, називають **напруженим станом в цій точці тіла**.

Якщо відомий напружений стан у будь-якій точці елемента конструкції, то можна оцінити міцність конструкції.

Реальні тіла при навантаженні змінюють свою форму і розміри, тобто **деформуються**. Для того, щоб характеризувати інтенсивність зміни форми і розмірів тіла, розглянемо точки  $A, B, C$  до деформації (рис. 2.18) [11].

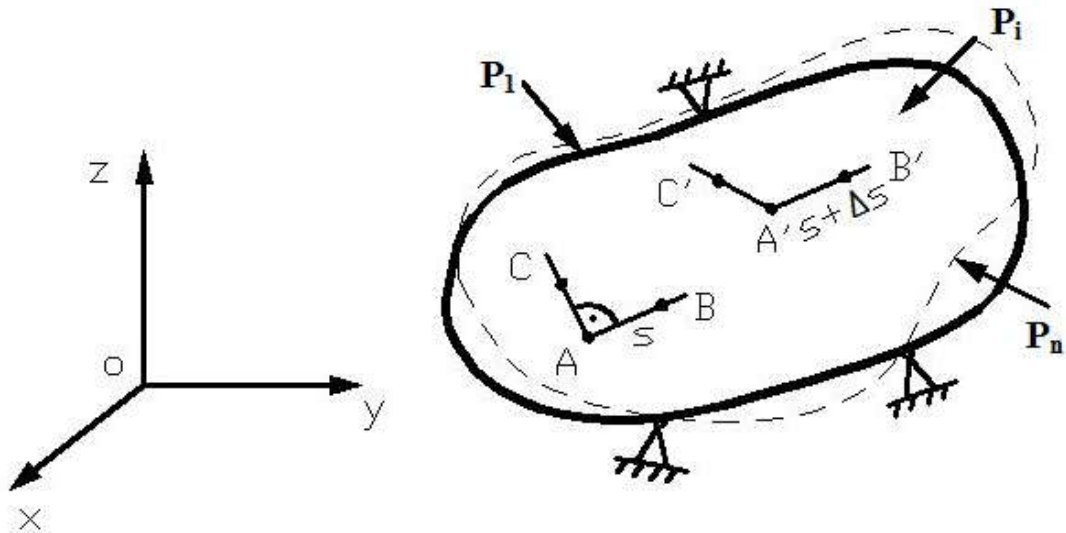


Рис.2.18

Прийmemo  $AB=S$ . Після навантаження тіло набуває форми, зображеної пунктирною лінією. Відстань між точками  $A$  і  $B$  змінюється на  $\Delta S$ , а точки  $A, B, C$  займають положення  $A', B', C'$ .

Характеристиками зміни розмірів і форми тіла в точці є лінійні і кутові деформації. **Лінійна деформація** у точці  $A$  за напрямом  $AB$

$$\varepsilon_{AA} = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{S}$$

В тій же точці, але в інших напрямках, лінійна деформація буде взагалі іншою. Лінійні деформації в цій точці в напрямках координатних осей системи  $Oxyz$  мають вигляд  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ .

Крім лінійної деформації, слід ввести поняття кутової деформації. Розглянемо прямий кут  $\angle \hat{A}\hat{A}\hat{N}$ , який після деформації тіла змінився і прийняв значення  $\angle \hat{A}'\hat{A}'\hat{N}'$ . Будемо зменшувати відрізки  $BA$  і  $CA$ , наближуючи точки  $B$  і  $C$  до точки  $A$  та залишаючи при цьому  $\angle \hat{A}\hat{A}\hat{N}$  прямим.

Тоді при граничному стані різниця кутів  $BAC$  і  $\hat{A}'\hat{A}'\hat{N}'$  буде наступною:

$$\gamma_{BAC} = \lim_{\substack{B \rightarrow A \\ C \rightarrow A}} (\angle BAC - \angle \hat{A}'\hat{A}'\hat{N}')$$

Це **кутова деформація**, або кут зсуву в т.  $A$ , віднесений до площини  $BAC$ .

У координатних площинах кути зсуву позначаються  $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ .

Сукупність лінійних і кутових деформацій в різних напрямках і площинах для однієї точки характеризує **деформаційний стан в цій точці**.

## 2.4. Основні гіпотези і принципи опору матеріалів

У розділі 2.1 були розглянуті перші чотири гіпотези, розглянемо у послідовності наступні основні гіпотези і принципи опору матеріалів:

1. *Гіпотеза про початковий ненапружений стан.* Вважають, що до прикладання навантаження механічна система перебуває у ненапруженому стані.

2. *Гіпотеза про малість деформацій.* Матеріалу властива велика жорсткість і деформації тіла мізерно малі порівняно з його початковими розмірами. У зв'язку з цим до розрахунків реакцій можна ввести розміри елементів конструкцій у недеформованому стані.

3. *Гіпотеза про лінійну залежність між напруженням і деформаціями.* Напруження, які не перевищують певних значень, пропорційні деформаціям, тобто матеріал підпорядкований закону Гука  $\sigma = E \cdot \varepsilon$ ,  $\tau = G \cdot \gamma$ , де  $E$  та  $G$  – відповідно модулі пружності I-го і II-го роду ( $E$  і  $G$  – механічні характеристики матеріалу і визначаються дослідним шляхом).

5. *Гіпотеза про ідеальну пружність матеріалу.* Під ідеальною пружністю розуміють здатність тіла відтворювати свою початкову форму після зняття навантаження.

5. *Принцип незалежності дії сил.* Результат дії на конструкцію системи сил дорівнює сумі результатів дії кожної окремої сили та не залежить від порядку прикладання вказаних сил.

6. *Принцип Сен-Венана.* У точках тіла, досить віддалених від місць прикладання навантаження, можна вважати, що напруження і деформації залежать лише від статичного еквівалента навантаження.

## 2.5. Розтягання-стискання елементів конструкцій

### 2.5.1. Напруження при розтяганні-стисканні, умова жорсткості

При дослідному вивченні деформування при розтяганні або стисканні стрижня з нанесеною на його бокову поверхню прямокутною мережею (рис. 2.19) виявлено такі закономірності:

- поперечні перерізи стрижня переміщуються поступально, зберігаючи плоску форму (лінійна деформація  $\varepsilon_x = \text{const}$  для всіх точок поперечного перерізу);

- прямокутні елементи мережі залишаються прямокутними (кут зсуву  $\gamma = 0$ );

- знак подовження  $\Delta l = l - l_0$  збігається із знаком поздовжньої сили  $N$ , а зміна поперечного розміру  $\Delta a = a - a_0$  має

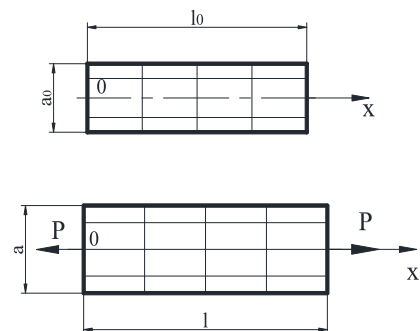


Рис. 2.19

протилежний знак.

На основі вищевикладеного виводимо, що при осьовому розтяганні-стисканні прямого бруса в його довільному поперечному перерізі виникають тільки нормальні напруження  $\sigma$ , які розподілені рівномірно ( $\sigma = \text{const}$  у точках поперечного перерізу).

Для виявлення нормальних напружень  $\sigma$  в поперечному перерізі I-I бруса, зображеного на рис. 2.19, застосуємо метод перерізів, тобто умовно розсічемо брус в цьому поперечному перерізі і розглянемо умову рівноваги, наприклад, лівої відсіченої частини [8]

$$\sum X = 0; \quad -P + \underbrace{\int \sigma dF}_N = 0 \rightarrow N = \int \sigma dF = \sigma \int dF = \sigma \cdot F; \quad N = P,$$

з якої визначаємо нормальні напруження в поперечному перерізі бруса

$$\sigma = \frac{N}{F}. \quad (2.4)$$

Для визначення нормальних  $\sigma_\alpha$  і дотичних  $\tau_\alpha$  напружень в точках нахилого перерізу, нормаль до якого  $n$  створює кут  $\alpha$  з віссю  $Ox$  (рис. 2.20) розглянемо елемент бруса у вигляді трикутника (рис. 2.21), для якого складено рівняння рівноваги

$$\sum P_n = 0; \quad \sigma_\alpha \cdot \frac{F}{\cos \alpha} - \sigma F \cdot \cos \alpha = 0 \rightarrow \sigma_\alpha = \sigma \cos^2 \alpha;$$

$$\sum P_{\tau_\alpha} = 0; \quad \tau_\alpha \frac{F}{\cos \alpha} - \sigma F \cdot \sin \alpha = 0 \rightarrow \tau_\alpha = \frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha.$$

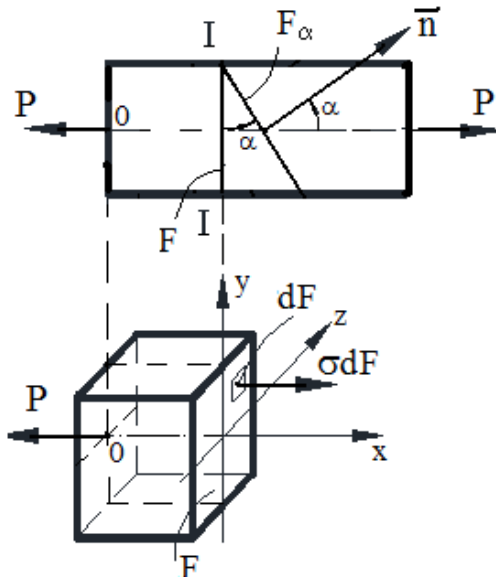


Рис. 2.20

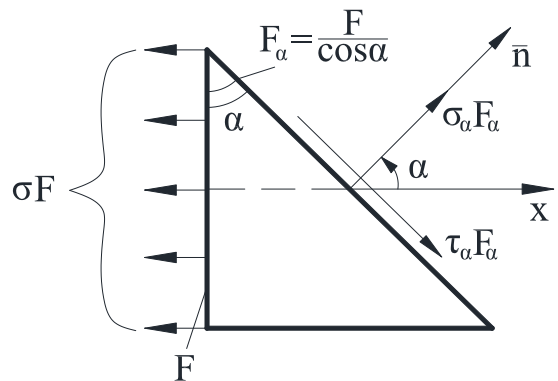


Рис. 2.21

Нормальні напруження  $\sigma_\alpha$  є додатними, якщо вони напрямлені вздовж зовнішньої нормалі  $n$  і від'ємними – при протилежному напрямі.

Дотичне напруження  $\tau_\alpha$  вважають додатним, якщо воно відхилене від зовнішньої нормалі  $n$  до нахилого перерізу за ходом стрілки годинника.

Проаналізуємо поздовжні та поперечні деформації бруса при розтяганні-стисканні. Розглянемо прямий брус довжиною  $l$ , поперечним розміром  $b$ , виготовленим з ізотропного матеріалу та навантажений силами  $P$  (рис. 2.22). Після деформації довжина бруса дорівнює  $l_1$ , а поперечний розмір дорівнює  $b_1$ . В результаті маємо:

$\Delta l = l_1 - l$ , м – **абсолютне подовження** (скорочення) бруса,

$\Delta b = b_1 - b$ , м – **абсолютна поперечна деформація**.

Лінійна деформація  $\varepsilon_x$  (**відносне подовження**) в напрямі поздовжньої осі  $x$  стрижня дорівнює  $\varepsilon_x = \Delta l / l$ . В межах пружних деформацій виконується лінійна залежність між напруженням  $\sigma_x$  і деформацією  $\varepsilon_x$

$$\sigma_x = E \cdot \varepsilon_x. \quad (2.5)$$

У вигляді формули (2.5) записаний **закон Гука** при розтяганні-стисканні, де коефіцієнт пропорційності  $E$  називається **модулем пружності першого роду**, або **модулем Юнга**, який визначається дослідним шляхом і є механічною характеристикою матеріалу (для сталі  $E_c = 200 \div 210$  ГПа,  $E_m = 100$  ГПа, для різних матеріалів значення  $E$  наведені у відповідних довідниках).

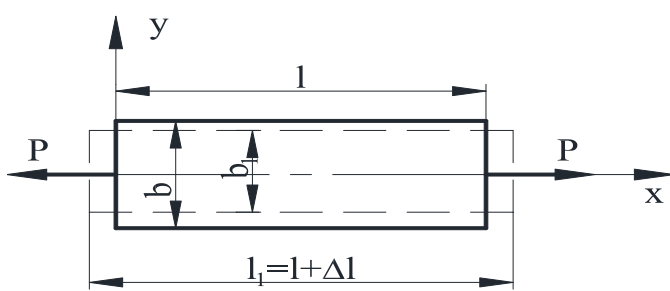


Рис.2.22

Якщо врахувати, що  $\sigma_x = \frac{N}{F}$ ,

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta l}{l}, \text{ то на основі виразу (2.5)}$$

можна визначити абсолютне подовження (скорочення) бруса у вигляді

$$\Delta l = \frac{Nl}{EF},$$

де  $EF$  називають **жорсткістю поперечного перерізу при розтяганні-стисканні**, а  $EF / l = c$  – **жорсткістю стрижня**. У випадках, коли по довжині бруса  $N \neq \text{const}$ ,  $EF \neq \text{const}$ , подовження  $\Delta l$  визначають за формулою

$$\Delta l = \int_0^l \frac{N dx}{EF}.$$

Лінійна деформація  $\varepsilon_y$  в напрямі поперечної осі  $y$  стрижня дорівнює  $\varepsilon_y = \Delta b / b$ . В межах пружних деформацій використовується залежність

$$\nu = \left| \frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} \right| = \text{const}, \quad (2.6)$$

або  $\varepsilon_y = -\nu \cdot \varepsilon_x$ , де  $\nu$  має назву коефіцієнта Пуассона. **Коефіцієнт Пуассона  $\nu$**  – безрозмірна величина, визначається дослідним шляхом і є механічною характеристикою матеріалу.

Коефіцієнт Пуассона, як і модуль Юнга, характеризує пружні властивості матеріалу. Для всіх ізотропних матеріалів значення коефіцієнта Пуассона  $\nu$

перебуває в межах  $0 \dots 0,5$ , для сталі  $\nu \approx 0,3$ , для інших матеріалів значення  $\nu$  наведені у відповідних довідниках.

Іноді для забезпечення нормальної роботи машин та споруд розміри їхніх деталей треба вибирати так, щоб задовольнити **умову жорсткості при розтяганні-стисканні**

$$\Delta l \leq [\Delta l], \quad (2.7)$$

де  $[\Delta l]$  – нормативна величина подовження (скорочення) бруса.

### 2.5.2. Характеристики механічних властивостей матеріалів

При проектуванні й розрахунках на міцність, жорсткість і стійкість елементів механізмів, машин та споруд треба знати механічні властивості матеріалів.

Одним із основних видів випробувань матеріалу є випробування на розтягання стандартних циліндричних зразків (рис. 2.23), оскільки при цьому виявляються найбільш важливі їх властивості.

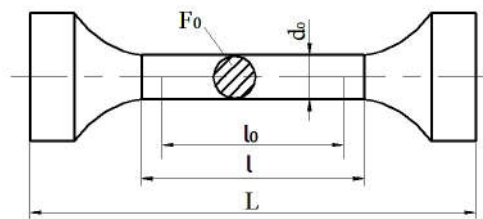


Рис. 2.23

У циліндричних стандартних зразках має витримуватися співвідношення між розрахунковою довжиною зразка  $l_0$  та діаметром  $d_0$ :  $l_0 = 10d_0$ , або  $l_0 = 5d_0$ .

Для випробувань на розтягання застосовують розривні машини, які дають змогу в процесі випробування визначати три групи механічних характеристик матеріалу.

1. *Характеристики пластичності:*

**відносне залишкове подовження після розриву**

$$\delta = \frac{l_1 - l_0}{l_0} \cdot 100\%,$$

де  $l_0$  і  $l_1$  – довжина робочої частини зразка до навантаження і після розриву;

**відносне залишкове звуження після розриву**

$$\Psi = \frac{F_0 - F_{ш}}{F_0} \cdot 100\%,$$

де  $F_0$  – площа поперечного перерізу зразка до навантаження;  $F_{ш}$  – площа поперечного перерізу шийки в місці розриву.



Матеріали, руйнування яких відбувається після великих залишкових деформацій ( $\delta > 5\%$ ), називають **пластичними** (маловуглецева сталь та ін.), а матеріали, які руйнуються при малих залишкових деформацій ( $\delta < 5\%$ ), називають **крихкими** (чавун, скло, камінь, бетон та ін.).

Оскільки властивості матеріалів можуть змінюватися в залежності від температури, способу навантаження та інших умов випробування, більш точним є визначення стану матеріалу – пластичного або крихкого.

## 2. Характеристики міцності:

**границя міцності**  $\sigma_m$  (рис. 2.24) (тимчасовий опір) – це напруження, що відповідає максимальній силі  $P_{max}$ , або найбільше напруження, яке виникає в матеріалі перед руйнуванням; при випробуванні на стискання пластичних матеріалів не виникає руйнування, отже, границя міцності не існує; для крихких матеріалів (рис. 2.25) границя міцності при стисканні  $\sigma_m^c$  значно вища, ніж границя міцності  $\sigma_m^p$  при розтяганні;

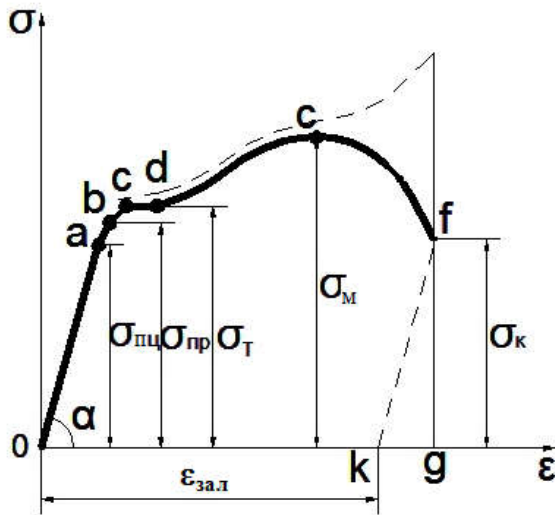


Рис. 2.24

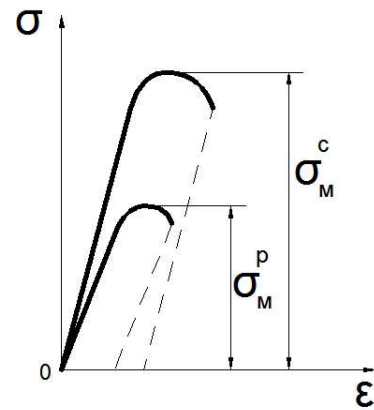


Рис. 2.25

**границя текучості**  $\sigma_T$  – це найменше напруження, при якому деформація зразка відбувається при сталому розтягальному зусиллі;  $\sigma_T$  визначають лише для таких пластичних матеріалів, діаграма яких має горизонтальну ділянку – площадку текучості; якщо діаграма умовних напружень не має площадки текучості (рис 2.26), то у цьому випадку визначають **умовну границю текучості**  $\sigma_{0,2}$  – напруження, яке викликає залишкову деформацію, яка дорівнює 0,2%.

**Питома робота руйнування**  $W$  – це робота руйнування (рис 2.27), віднесена до об'єму робочої частини зразка  $Fl_0$

$$W = \frac{\eta \cdot P_{\max} \cdot (l - l_0)}{F \cdot l_0},$$

де  $P_{\max}$  – найбільше значення розтягальної сили,  $\eta$  – коефіцієнт заповнення діаграми (для маловуглецевої сталі  $\eta = 0,85$ ). Питома робота руйнування є характеристикою міцності матеріалу при ударному навантаженні.

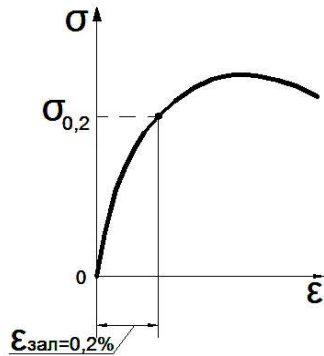


Рис. 2.26

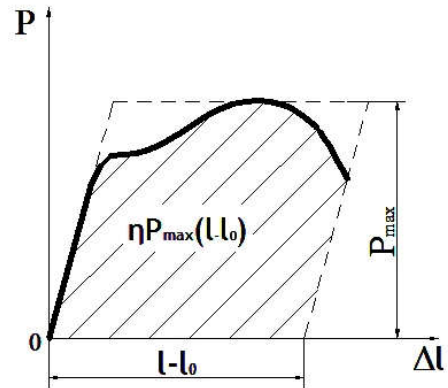


Рис. 2.27

### 3. Характеристики деформаційних властивостей:

**границя пропорційності**  $\sigma_{пц}$  – це найбільше напруження, для якого є вірним закон Гука  $\sigma = E \cdot \epsilon$ ; аналогічно визначається  $\tau_{пц}$  щодо залежності  $\tau = G \cdot \gamma$ ;

**границя пружності**  $\sigma_{пр}$  – це найбільше напруження, при якому деформації є пружними, тобто зникаючими після розвантаження;  
модуль Юнга  $E$  (модуль пружності першого роду) характеризує здатність матеріалу чинити опір зміні розмірів,  
модуль зсуву  $G$  (модуль пружності другого роду) характеризує здатність матеріалу чинити опір зміні форми;  
коефіцієнт Пуассона  $\nu$  характеризує співвідношення між поперечними і поздовжніми деформаціями.

Попереднє витягування за границю текучості змінює деякі механічні властивості сталі – підвищує границю пропорційності й зменшує залишкове подовження після розриву, тобто робить її більш крихкою. Зміна властивостей матеріалу внаслідок попередньої деформації за границею текучості називається **наклепом**. Найчастіше явище наклепу намагаються усунути, але, інколи, наклеп корисний, і його утворюють штучно.

### 2.5.3 Допустимі напруження. Умова міцності при розтяганні-стисканні

Найбільш розповсюдженим методом розрахунку деталей машин та елементів споруд на міцність є розрахунок за допустимими напруженнями, при яких у точках навантажень тіла не повинні виникати граничні стани (для

крихких матеріалів – стан, при якому напруження досягають границі міцності  $\sigma_m$  й починається руйнування; для пластичних матеріалів – стан, при якому напруження досягають границі текучості  $\sigma_T$  й виникають значні пластичні деформації).

Допустиме напруження  $[\sigma]$  виражають через граничне напруження  $\sigma_{\text{до}}$  та коефіцієнт запасу міцності  $n > 1$ :

$$[\sigma] = \sigma_{\text{до}} / n; \quad \sigma_{\text{до}} = \begin{cases} \sigma_0 & (\text{для } \sigma_0 \leq \sigma_T) \\ \sigma_i & (\text{для } \sigma_0 > \sigma_T) \end{cases} \quad (2.8)$$

Вибір коефіцієнта запасу міцності залежить від стану матеріалу (крихкий або пластичний), характеру прикладання навантаження (статичне, динамічне), неоднорідності матеріалу, наближеності розрахункових схем тощо.

В машинобудуванні обчислюють **коефіцієнт запасу міцності**  $n$  як добуток  $n = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3$ , де множник  $n_1$  враховує точність розрахунку,  $n_2$  – неоднорідність матеріалу,  $n_3$  – умови роботи. В інженерній практиці визначають  $n$  як нормативну величину.

**Умова міцності при розтяганні-стисканні** полягає в тому, що максимальне нормальне напруження в небезпечному поперечному перерізі механічної системи не повинно перевищувати допустиме напруження, тобто

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{\max |N|}{F} \leq [\sigma]. \quad (2.9)$$

Цю умову використовують у розрахунках на міцність трьох типів: 1) перевірка міцності; 2) визначення допустимої сили; 3) підбір поперечного перерізу (проектний розрахунок).

## 2.6. Геометричні характеристики плоских перерізів стрижня

До основних геометричних характеристик плоских перерізів відносять: площа поперечного перерізу, статичні моменти площі поперечного перерізу, моменти інерції, радіуси інерції, моменти опору. Ці величини використовують при розрахунках на міцність, жорсткість та стійкість конструкцій.

Розглянемо деякий переріз бруса і зв'яжемо його з ортогональною системою координат  $zOy$  (рис. 2.28). Приведемо основні означення геометричних характеристик цієї плоскої фігури.

**Площа** плоскої фігури,  $m^2$

$$F = \int dF.$$

**Статичні моменти** плоскої фігури відносно осей  $z$  або  $y$ ,  $m^3$

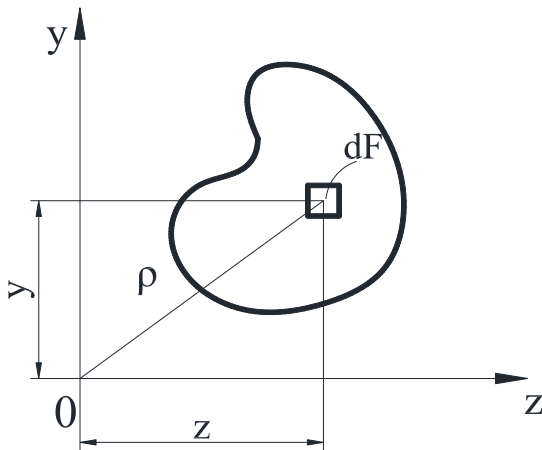
$$S_z = \int_F y dF; S_y = \int_F z dF \quad (2.10)$$

Статичні моменти фігури можна виразити через координати  $z_c$ ,  $y_c$  центру ваги (точка  $C$ ) фігури

$$S_z = F \cdot y_c; S_y = F \cdot z_c \quad (2.11)$$

Із співвідношення (2.11) випливають формули для визначення **координат центру ваги** плоскої фігури

$$z_c = \frac{S_y}{F} = \frac{\sum_{i=1}^n z_i F_i}{\sum_{i=1}^n F_i}; y_c = \frac{S_z}{F} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i F_i}{\sum_{i=1}^n F_i} \quad (2.12)$$



де  $n$  – кількість частин фігури, на які вона розбита,  $F_i$  – площа  $i$ -тої частини фігури.

Осі, які проходять через центр ваги фігури і лежать в її площині називають **центральними осями**.

**Осьові моменти інерції відносно осі  $z$  або осі  $y$  відповідно,  $m^4$**

Рис. 2.28

$$I_z = \int_F y^2 dF, I_y = \int_F z^2 dF \quad (2.13)$$

**Відцентровий момент інерції** плоскої фігури відносно пари осей  $z$  і  $y$ ,  $m^4$

$$I_{zy} = \int_F zy dF \quad (2.14)$$

**Полярний момент інерції** плоскої фігури відносно полюса  $O$ ,  $m^4$

$$I_p = \int_F \rho^2 dF \quad (2.15)$$

**Радіуси інерції** відносно осі  $z$  або осі  $y$  відповідно,  $m$

$$i_z = \sqrt{\frac{I_z}{F}}; i_y = \sqrt{\frac{I_y}{F}} \quad (2.16)$$

**Осьові моменти опору** відносно осі  $z$  або  $y$ ,  $m^3$

$$W_z = \frac{I_z}{y_{\max}}; W_y = \frac{I_y}{F} \quad (2.17)$$

**Полярний момент опору відносно полюса  $O$ ,  $m^3$**

$$W_p = \frac{I_p}{\rho_{\max}}. \quad (2.18)$$

Формули для геометричних характеристик *простіших фігур* отримані за формулами (2.13), (2.17), (2.16) і мають такий вигляд.

Моменти інерції *прямокутника* розмірами  $b \times h$  (рис. 2.29):  $I_z = \frac{b \cdot h^3}{12}$ ;  
 $I_y = \frac{h \cdot b^3}{12}$ ; моменти опору:  $W_z = \frac{b \cdot h^2}{6}$ ;  $W_y = \frac{h \cdot b^2}{6}$ ; радіуси інерції  $i_z = \frac{h}{\sqrt{12}}$ ;  
 $i_y = \frac{b}{\sqrt{12}}$ ;  $y_{\max} = h/2$ ;  $z_{\max} = b/2$ .

З використанням формул (2.15), (2.18) осьові і полярні моменти інерції *круга* діаметром  $d$  (рис. 2.30):

$I_z = I_y = \frac{\pi \cdot d^4}{64}$ ;  $I_p = \frac{\pi \cdot d^4}{32}$ ; моменти опору  $W_z = W_y = \frac{\pi \cdot d^3}{32}$ ;  $W_p = \frac{\pi \cdot d^3}{16}$ ; радіуси інерції  $i_z = i_y = d/4$ ;  $y_{\max} = z_{\max} = d/2$ ;  $\rho_{\max} = d/2$

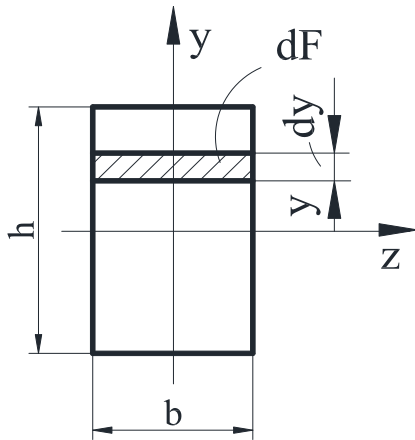


Рис. 2.29

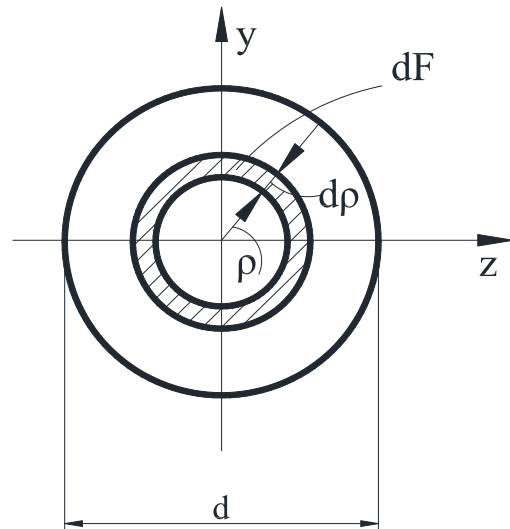


Рис. 2  
Рис. 2.30

Сталь прокатна виготовляється у формі: двотавр (2.31,а, ГОСТ 8239 – 89), швелер (рис. 2.31,б, ГОСТ 8240 – 89), кутники рівнобічні (рис. 2.31,в, ГОСТ 8509 – 86), кутники нерівнобічні (рис. 2.31,г ГОСТ 8510 – 86).

Геометричні характеристики перерізів фасонних прокатних профілів наведені у відповідних таблицях сортаменту.

В інженерній практиці розраховують моменти інерції фігур складної конфігурації. Складену фігуру перерізу необхідно розбити на прості фігури так, щоб їх сумарна площа складала площу даної фігури. Момент інерції складеної

фігури відносно будь-якої осі дорівнює сумі моментів інерції простіших фігур, які розраховують відносно цієї самої осі, тобто  $I_z = I_z^I + I_z^{II} + \dots$

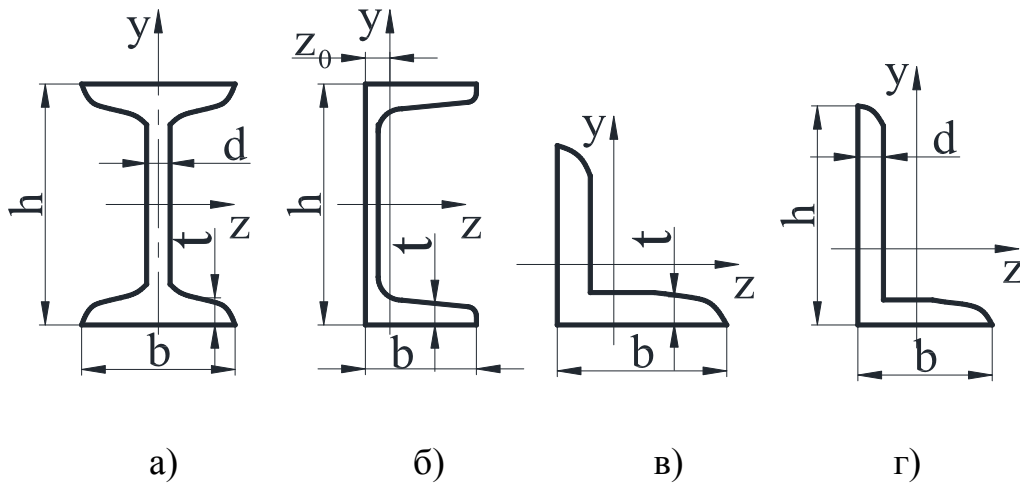


Рис. 2.31

Осьові моменти інерції змінюються в залежності від розташування осей координат. Формули і рекомендації розрахунків моментів інерції при паралельному переносі осей та при повороті осей розглянуті в базових підручниках з опору матеріалів [6, 7].

## 2.7. Зсув і кручення елементів конструкцій

### 2.7.1. Напруження і деформації при зсуві

**Валом** називають брус (стрижень), який зазнає кручення. Скручувальний зовнішній момент  $\hat{I}$ , який навантажує вал приводу обертання, визначають за величинами потужності  $\hat{E}$ , яку передає даний елемент конструкції, і кутової швидкості обертання  $\omega$

$$\hat{I} = \frac{\hat{E}}{\omega}.$$

Експериментальне вивчення деформування вала показало, що при навантаженні вала з нанесеною на циліндричну поверхню сіткою (рис. 2.32) і просвердленим вздовж осі вузьким отвором виявляємо такі закономірності. Вісь вала зберігає прямолінійну форму (просвердлений вздовж осі вузький отвір просвічується). Поперечні перерізи вала залишаються плоскими і перпендикулярними до поздовжньої осі вала; вони повертаються один відносно одного на кут, який називають **кутом закручування**  $\varphi$ . Відстані між поперечними перерізами вала не змінюються. Радіуси поперечних перерізів не скривлюються, залишаються незмінної довжини і повертаються відносно осі вала.

З цих спостережень виходить, що у поперечних перерізах відсутні нормальні напруження ( $\sigma=0$ ), а виникають лише дотичні напруження  $\tau$ , пов'язані з кутовою деформацією – **кутом зсуву**  $\gamma$ .

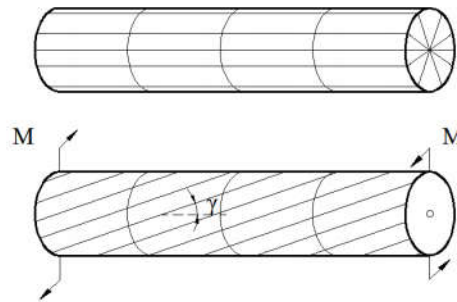


Рис. 2.32

При крученні вала має місце гіпотеза плоских перерізів.

**Чистим зсувом** називають окремий випадок плоского напруженого стану, при якому на гранях 1-4 елементарного об'єму тіла (рис. 2.33) виникають тільки дотичні напруження  $\tau$ .

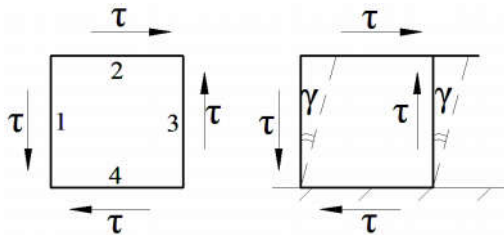


Рис. 2.33

За даними експерименту **закон Гука при зсуві** набуває вигляду

$$\tau = G \cdot \gamma, \quad (2.19)$$

де  $G$  – **модуль пружності другого роду** або **модуль зсуву**. Модуль зсуву знаходиться дослідним шляхом і є механічною характеристикою матеріалу (для ст. 3  $G=80$  ГПа). Існує залежність між  $G$ ,  $E$  і  $\nu$ :

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)}.$$

### 2.7.2. Напруження і деформації при крученні стрижнів круглого поперечного перерізу

Для визначення напружень  $\tau$  у поперечному перерізі вала (рис. 2.34) застосовуємо метод перерізів, тобто розсічемо вал у цьому перерізі і розглянемо, наприклад, ліву відсічену частину вала (рис. 2.35).

Використовуючи рис. 2.35 та рівняння статки  $\sum \dot{I}_{\delta} = 0$ , будемо мати

$$M = M_{\delta\delta} = \int_F \tau \cdot \rho \cdot dF, \quad (2.20)$$

де  $\rho$  – полярна координата точки перерізу.

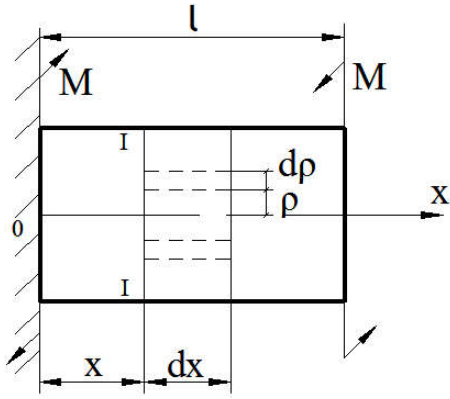


Рис. 2.34

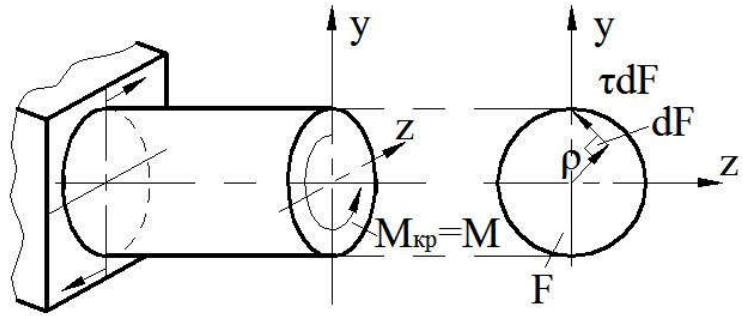


Рис. 2.35

Характер розподілу напружень  $\tau$  по поперечному перерізу вала з'ясуємо, розглянувши деформацію стрижня. Виділяємо довільний елемент стрижня (див. рис. 2.34) довжиною  $dx$  та радіусом  $\rho$  (рис. 2.36).

Як видно з геометрії рис. 2.36:  $(b'b) = \gamma \cdot dx = \rho \cdot d\varphi$ . Звідси **відносний кут закручування  $\theta$**  валу дорівнює

$$\theta = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{\gamma}{\rho} \quad (2.21)$$

та на основі (2.20) – закону Гука при зсуві

$$\tau = G \cdot \gamma = G \cdot \rho \cdot d\varphi/dx. \quad (2.22)$$

Підставляючи (2.22) у (2.20) будемо мати

$$\dot{I}_{\varepsilon\delta} = G \cdot \frac{d\varphi}{dx} \cdot \int_F \rho^2 \cdot dF,$$

$$\text{або} \quad \frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_{\varepsilon\delta}}{G \cdot I_p}, \quad (2.23)$$

де  $GI_p$  – **жорсткість поперечного**

**перерізу валу.**

Підставляючи (2.23) у (2.22), матимемо формулу для **дотичних напружень при крученні стрижня круглого поперечного перерізу** у вигляді

$$\tau = \frac{\dot{I}_{\varepsilon\delta} \cdot \rho}{I_p}. \quad (2.24)$$

Як випливає з (2.23), кут закручування вала довжиною  $l$  у випадку  $M_{\varepsilon\delta} = \text{const}$ ,  $G \cdot I_p = \text{const}$  розраховують за формулою

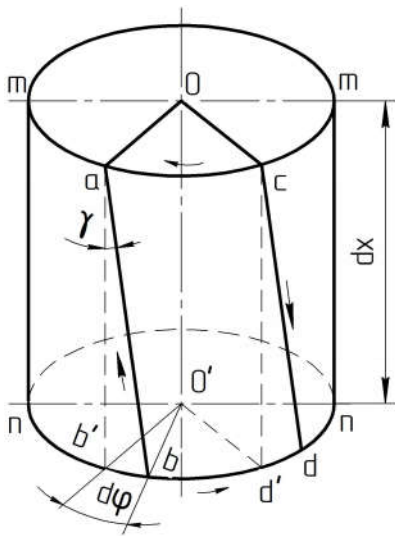


Рис. 2.36



$$\varphi = \frac{M_{\text{ед}} \cdot l}{G \cdot I_p}. \quad (2.25)$$

Якщо стрижень складається з декількох ділянок, причому  $M_{\text{ед}}$  і  $I_p$  змінні по довжині кожної ділянки, то кут закручування визначається за формулою

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \int_{l_i} \frac{M_{\text{ед}}(x) \cdot dx}{G_i \cdot I_{p_i}},$$

де  $i$  – номер ділянки, у межах якої зберігаються закони зміни  $M_{\text{ед}}$  і  $I_p$ ;  $n$  – кількість ділянок;  $l$  – довжина  $i$ -тої ділянки;  $G_i \cdot I_{p_i}$  – жорсткість поперечного перерізу  $i$ -тої ділянки.

Дотичне напруження  $\tau$  у довільній точці поперечного перерізу (див. рис. 2.35) є перпендикулярним до радіуса  $\rho$ , проведеного у цю точку.

Найбільшого значення дотичне напруження набуває у точках зовнішнього контуру поперечного перерізу

$$\tau_{\text{max}} = \frac{M_{\text{ед}}}{W_p}, \quad (2.26)$$

Епюра дотичних напружень  $\tau$  у поперечному перерізі вала представлена на рис. 2.37.

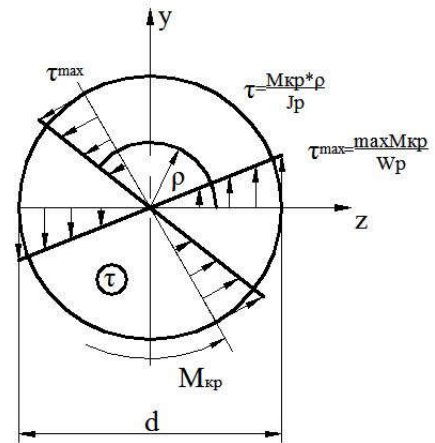


Рис. 2.37

### 2.7.3. Умови міцності і жорсткості при крученні валів

Умова міцності при крученні полягає в тому, що максимальне дотичне напруження у небезпечному поперечному перерізі вала (де крутний момент приймає найбільше значення  $\max M_{\text{ед}}$ ) не повинно перевищувати допустиме напруження  $[\tau]$  й має вигляд:

$$\tau_{\text{max}} = \frac{\max M_{\text{ед}}}{W_p} \leq [\tau], \quad (2.27)$$

де  $[\tau] = \tau_{\text{ад}} / n$ ;  $\tau_{\text{ад}}$  – граничне дотичне напруження, яке залежить від матеріалу стрижня і визначається експериментально;  $n$  – коефіцієнт запасу міцності (див. розділ 2.6).

Для того, щоб забезпечити нормальні умови роботи зубчастих передач, запобігти крутильних коливанням і прискореного зношування у системах приводу, крім умови міцності, використовують також **умову жорсткості при крученні**

$$\theta_{\max} = \frac{\varphi_{\max}}{l} = \frac{\max M_{\dot{\epsilon}\delta}}{G \cdot I_p} \leq [\theta], \quad (2.28)$$

де  $\theta_{\max}$  – найбільший відносний кут закручування,  $\text{рад/м}$ ;  $[\theta]$  – допустиме значення відносного кута закручування,  $\text{рад/м}$ .

При проведенні розрахунків суцільних валів застосовують вирази для геометричних характеристик  $I_p$  та  $W_p$ , виведені для круга у розділі 2.6, і отримують розрахункові формули для  $d_i$  – діаметра валу з умови міцності і  $d_{\epsilon}$  – діаметра валу з умови жорсткості у вигляді

$$d_i \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot \max M_{\dot{\epsilon}\delta}}{\pi \cdot [\tau]}}; \quad d_{\epsilon} \geq \sqrt[4]{\frac{32 \cdot \max M_{\dot{\epsilon}\delta}}{G \cdot \pi \cdot [\theta]}}.$$

Остаточні приймають значення діаметра валу як найбільше з двох значень:  $d = \max(d_i, d_{\epsilon})$ .

Епюра для дотичних напружень  $\tau$ , яка наведена на рис. 2.37, показує, що більш раціональним в порівнянні з суцільним є порожній вал з кільцевим поперечним перерізом. Для кільця зручно задати співвідношення внутрішнього  $d_{\hat{a}}$  та зовнішнього  $d_{\hat{\epsilon}}$  діаметрів  $\alpha = \frac{d_{\hat{a}}}{d_{\hat{\epsilon}}} \approx 0,6 \dots 0,8$ .

Умови міцності та жорсткості для порожнього валу мають вигляд (2.27), (2.28). Геометричні характеристики поперечного перерізу форми кільця

$$I_p = \frac{\pi \cdot d_{\hat{\epsilon}}^4}{32} (1 - \alpha^4); \quad W_p = \frac{\pi \cdot d_{\hat{\epsilon}}^3}{16} (1 - \alpha^4)$$

Зовнішній діаметр порожнього вала розраховують зі співвідношень

$$d_{\hat{\epsilon}}^i \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot \max M_{\dot{\epsilon}\delta}}{\pi \cdot [\tau] \cdot (1 - \alpha^4)}}; \quad d_{\hat{\epsilon}}^{\epsilon} \geq \sqrt[4]{\frac{32 \cdot \max M_{\dot{\epsilon}\delta}}{G \cdot \pi \cdot [\theta] \cdot (1 - \alpha^4)}}.$$

Виготовлення порожніх валів – дуже ефективний засіб зниження затрат матеріалу, тобто зниження ваги валів. Цього досягають шляхом застосування труб відповідних діаметрів.

## 2.8. Згинання елементів конструкцій

### 2.8.1. Види згинання, нормальне напруження при чистому згинанні

**Згинання** – це вид опору стрижня, який навантажений силами, перпендикулярними до поздовжньої осі цього бруса та парами сил, що діють у площинах, які містять в собі поздовжню вісь бруса.

Стрижень, який працює на згинання, називають **балкою**.

Основні види згинання бруса наведені у вигляді таблиці 2.1 [8].

Розглянемо балку, на поверхню якої нанесена прямокутна сітка, а по кінцях прикладені зовнішні згинальні пари  $M$ , які розташовані у площині  $Oxy$  (рис. 2.38). Вісь  $Ox$  – поздовжня вісь балки, вісь  $Oy$  – вісь симетрії поперечного перерізу балки, т.  $O$  – початок координат.

Таблиця 2.1

Назва виду опору	Назва виду згинання	Ознаки
1.	Чисте згинання	Тільки $M_{\varphi a}(M_z, M_y) \neq 0$ .
2.	Поперечне згинання	$M_{\varphi a}(M_z, M_y) \neq 0$ і $Q(Q_y, Q_z) \neq 0$ .
3.	Пряме згинання	$M_z \neq 0$ або $M_y \neq 0$ .
4.	Косе згинання	$M_z \neq 0$ і $M_y \neq 0$ .
5.	Просте згинання	Все навантаження, розташоване у одному поздовжньому перерізі балки, який називають силовою площиною.
6.	Складне згинання	Навантаження, розташоване у різних силових площинах.
7.	Плоске згинання	Поздовжня вісь навантаженої балки – плоска крива.
8.	Просторове згинання	Поздовжня вісь навантаженої балки – просторова крива.

Після деформування балки (рис. 2.38,б) її початкова пряма поздовжня вісь  $Ox$ , а також усі її поздовжні волокна скривлюються по дузі кола; контури поперечних перерізів залишаються плоскими, про що свідчать поперечні лінії сітки, які залишаються прямими і перетинаються з поздовжніми лініями сітки під прямим кутом.

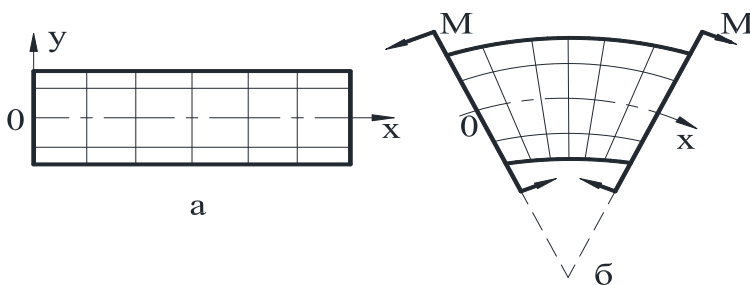


Рис. 2.38

Поздовжні волокна, що лежать на опуклій стороні балки, подовжуються, а ті, що знаходяться на угнутій стороні, скорочуються.

Між подовженими і скороченими волокнами знаходиться нейтральний шар, волокна якого не змінюють своєї початкової

довжини. Лінія перетинання нейтрального шару з площиною поперечного перерізу балки називається **нейтральною лінією** (вісь  $z$ , яка є власною у кожному поперечному перерізі балки і напрямлена перпендикулярно до площини рисунка) (рис. 2.38,б).

Кінцеві поперечні перерізи балки залишаються плоскими і їх розміри не змінюються.

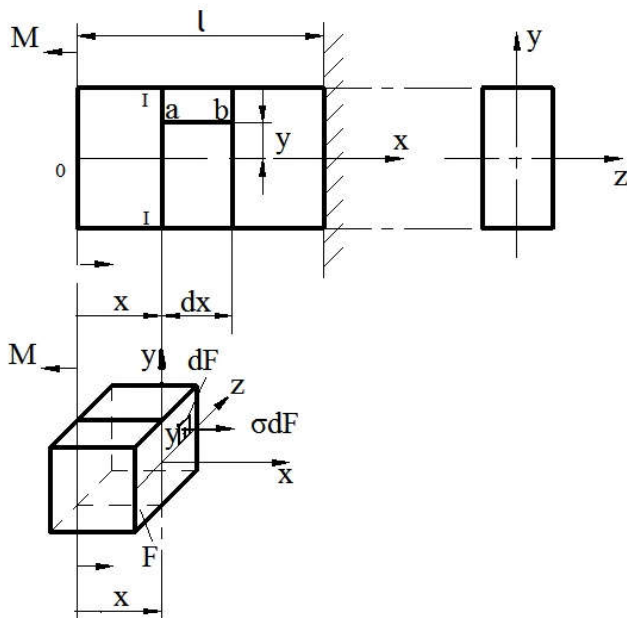
Із спостережень одержуємо два висновки:

1. При чистому прямому згинанні має місце гіпотеза плоских перерізів, тобто довільний поперечний переріз балки плоский до деформації залишається плоским і після деформації балки.

2. В поперечних перерізах балки при чистому прямому згинанні виникають тільки нормальні напруження  $\sigma$ , які розподіляються по поперечному перерізу нерівномірно.

Розглянемо випадок чистого прямого згинання балки (рис. 2.39).

Для визначення напружень  $\sigma$  в поперечному перерізі I-I застосуємо метод перерізів, тобто розсічемо балку в поперечному перерізі I-I і розглянемо, наприклад, ліву відсічену частину (див. рис. 2.39), для якої складено рівняння рівноваги  $\sum M_z = 0$ . В результаті будемо мати



$$-M + \int_F \sigma y dF = 0, \text{ або}$$

$$M = M_z = \int_F \sigma y dF \quad (2.29)$$

Для визначення з (2.29) **нормального напруження  $\sigma$  при чистому згинанні** слід встановити, за яким законом змінюються ці напруження в поперечному перерізі балки. Для цього виділимо елемент балки  $dx$  і зобразимо в ньому відрізок  $ab$  довжиною  $dx$ , який є паралельним до осі  $x$  (див. рис. 2.39).

Розглянемо елемент балки  $dx$  після її деформації (рис. 2.40).

Очевидно, здійснюється подовження елемента на величину

$$bb_1 = y d\theta. \quad (2.30)$$

Довжина елемента балки

$$dx = \rho d\theta, \quad (2.31)$$

де  $\rho$  – радіус кривизни балки.

На основі виразів (2.30), (2.31) маємо

$$\varepsilon = \frac{bb_1}{dx} = \frac{y}{\rho} \quad (2.32)$$

де  $\frac{1}{\rho}$  – **кривизна балки**.

На основі закону Гука одержуємо

$$\sigma = E\varepsilon = \frac{E}{\rho} y \quad (2.33)$$

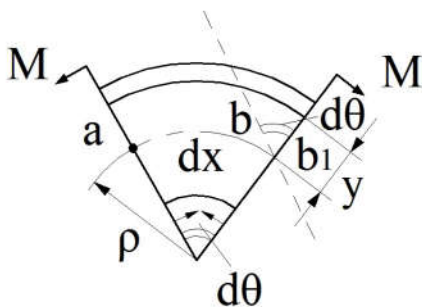


Рис. 2.40

Рис. 2.39

З виразу (2.33) випливає, що по висоті поперечного перерізу напруження  $\sigma$  зміниться за лінійним законом.

Підставляючи (2.33) у (2.29), будемо мати

$$M_z = \frac{E}{\rho} \int_F y^2 dF,$$

де  $\int_F y^2 dF = I_z$  – осьовий момент інерції поперечного перерізу балки відносно осі  $z$ . Звідси кривизна балки

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_z}{E \cdot I_z} \quad (2.34)$$

Підставляючи вираз для кривизни балки у (2.33), одержуємо формулу для **нормальних напружень при чистому прямому згинанні – формулу Нав'є** – у вигляді:

$$\sigma = \frac{M_z y}{I_z}, \quad (2.35)$$

де  $M_z$  – згинальний момент, значення якого визначають з відповідної епюри;  $y$  – ордината точки поперечного перерізу, в якій знаходять напруження  $\sigma$ .

**Найбільші нормальні напруження  $\sigma_{\max}$**  при чистому прямому згинанні балки виникають у точках поперечного перерізу найбільш віддалених від нейтральної лінії цього поперечного перерізу і дорівнюють

$$\sigma_{\max} = M_z / W_z.$$

Епюра нормальних напружень  $\sigma$  по висоті круглого, прямокутного та двотаврового поперечних перерізів балки однакової висоти  $h$  показана на рис. 2.41.

Оскільки напруження  $\sigma$  збільшується із зростанням віддалі від нейтральної осі  $z$ , *більш раціональними є такі поперечні перерізи балок*, в яких більша частина матеріалу розташована найбільш віддалено від нейтральної осі  $z$ , тобто двотавр більш раціональний, ніж прямокутник, а прямокутник більш раціональний, ніж круг.

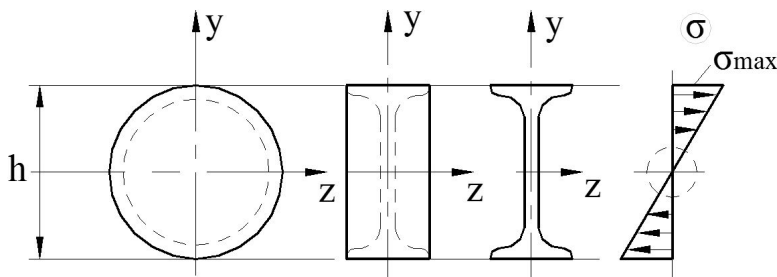


Рис. 2. 41

### 2.8.2. Умови міцності при плоскому поперечному згинанні

Для забезпечення міцності балки при плоскому **поперечному згинанні**, її геометричні розміри повинні бути такими, щоб при відповідних навантаженнях розрахункові напруження ні в одній точці і, в першу чергу, в небезпечній не перевищували допустимих.

У поперечних перерізах балки, крім згинального моменту  $M_z$  і зв'язаних з ним **нормальних напружень**  $\sigma$ , виникає ще й поперечна сила  $Q_y$  і зв'язані з нею **дотичні напруження**  $\tau_{xy}$ . При виникненні дотичних напружень  $\tau_{xy}$  з'являються деформації зсуву, внаслідок цього при поперечному згинанні не виконується гіпотеза плоских перерізів.

Методами теорії пружності доведено, що формула Нав'є для визначення нормальних напружень  $\sigma$  забезпечує точність, яка достатня для інженерних розрахунків, але похибка визначення напружень  $\sigma$  при поперечному згинанні зростає разом із зростанням відношення  $h/l$  ( $h$  – висота поперечного перерізу у площині згинання балки довжиною  $l$ ). При згинанні нормальне напруження по висоті перерізу змінюється за лінійним законом.

**Умова міцності за нормальними напруженнями** при поперечному згинанні має вигляд:

$$\sigma_{\max} = \frac{\max |M_z|}{W_z} \leq [\sigma], \quad (2.36)$$

При визначенні дотичних напружень при поперечному згинанні приймають такі припущення: у точках поперечного перерізу, що знаходяться на однаковій відстані від осі  $z$  дотичні напруження однакові за величиною; в усіх точках поперечного перерізу дотичні напруження паралельні осі  $y$ .

У якості геометричної ілюстрації оберемо переріз прямокутної форми і розглянемо епюру розподілу дотичних напружень по висоті балки (рис. 2.42).

Для визначення дотичного напруження у даній точці поперечного перерізу (наприклад, т. К на рис. 2.42)

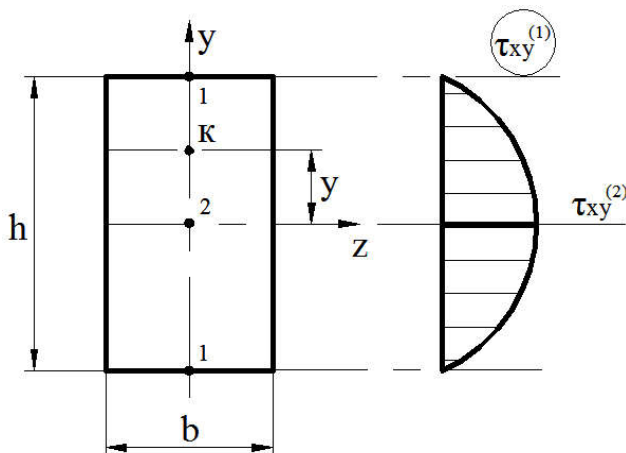


Рис. 2.42

треба попередньо розрахувати осьовий момент інерції перерізу  $I_z$ , поперечну силу у даному перерізі  $\frac{dM_z}{dx} = Q_y$ ;  $\int_{F_a} y dF_a = S_z^a$  – статичний момент відносно осі  $z$  відсіченої частини поперечного перерізу, розташованої вище або нижче точки поперечного перерізу, в якій визначається напруження  $\tau_{xy}$ ;  $b$  –

ширина поперечного перерізу у даній точці.

Для визначення дотичних напружень при поперечному згинанні використовують **формулу Д. І. Журавського**:

$$\tau_{xy} = \frac{Q_y \cdot S_z^a}{b \cdot I_z}.$$

Найбільші дотичні напруження виникають у поперечному перерізі балки там, де поперечна сила дорівнює  $\max Q_y$ . В цьому поперечному перерізі напруження розподілені нерівномірно. Найбільші значення  $\max \tau_{xy}$  виникають у точках, для яких статичний момент  $S_z^a$  досягає максимальної величини. Напруження  $\tau_{xy}$  розподіляються за криволінійним законом по висоті поперечного перерізу.

Максимальні дотичні напруження дорівнюють

$$\max \tau_{xy} = \frac{\max Q_y \cdot \max S_z^a}{b \cdot I_z}.$$

Запишемо **умову міцності за дотичними напруженнями** при поперечному згинанні:

$$\tau_{\max} = \max \left| \frac{Q_y \cdot S_z^a}{b \cdot I_z} \right| \leq [\tau]. \quad (2.37)$$

Для балки прямокутного поперечного перерізу епюри розподілу нормальних і дотичних напружень мають вигляд як на рис. 2.43. Максимальні нормальні напруження виникають у точках перерізу на рівні 1. Дотичні напруження досягають максимуму у точках на рівні 2. Нормальні напруження  $\max \sigma = \sigma^{(1)} = M_z / W_z$ ;  $\sigma^{(2)} = 0$ . На рівні точок 1 і 2 перерізу дотичні напруження дорівнюють:  $\tau_{xy}^{(1)} = 0$ ;  $\max \tau_{xy} = \tau_{xy}^{(2)} = \frac{3}{2} \frac{Q_y}{F}$ .

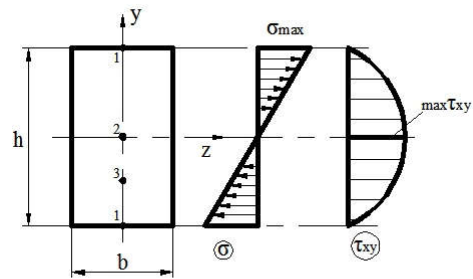


Рис. 2.43

Можна показати аналітично, що по висоті прямокутного поперечного перерізу балки дотичні напруження  $\tau_{xy}$  змінюються за знаком квадратичної параболи.

Якщо виконуються умови міцності для небезпечних точок 1 і 2, то, як правило, міцність у проміжних точках 3 зберігається.

### 2.8.3. Деформації при згинанні

Вісь зігнутої балки при прямому чистому або поперечному згинанні, яку називають також пружною лінією балки, є плоскою кривою, площина якої збігаються з однією з поздовжніх головних площин балки. Для пояснення

основних понять, які зв'язані з визначенням переміщень при згинанні, розглянемо приклад згинання консолі (рис. 2.44) [8].

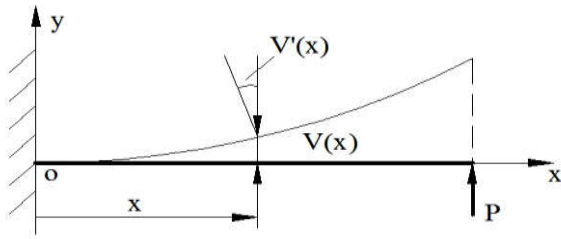


Рис. 2.44

При згинанні балки її поздовжня вісь скривлюється, а точка цієї осі переміщується відносно свого початкового положення. При малих деформаціях балки можна нехтувати горизонтальними складовими переміщень і брати до уваги лише вертикальні складові переміщень точок поздовжньої вісі балки, які називають **прогинами**  $v(x)$ .

Плоска крива  $v = v(x)$  називається **пружною лінією** балки.

У випадку малих деформацій балки **кут повороту поперечного перерізу** дорівнює  $v'(x)$  (див. рис. 2.44).

При прямому поперечному згинанні, крім переміщень, викликаних згинальними моментами  $M_z$ , виникають ще й переміщення, які викликані поперечними силами  $Q_y$ . Вплив поперечних сил на переміщення при згинанні залежать в першу чергу від відношення довжини прольоту балки  $l$  до висоти  $h$  її поперечного перерізу у площині згинання.

Для балки з відношенням порядку  $l/h \geq 10$  впливом поперечної сили  $Q_y$  на величину прогинів  $v(x)$  та кутів повороту  $v'(x)$  поперечних перерізів балки можна нехтувати.

У випадку прямого чистого та поперечного згинання кривизна пружної лінії  $\frac{1}{\rho} = \frac{M_z}{E \cdot I_z}$  (при чистому прямому згинанні  $M_z = const$ ; при прямому поперечному згинанні  $M_z = M_z(x)$ ).

З математики відомо, що кривизна плоскої кривої  $v = v(x)$  виражається формулою

$$\frac{1}{\rho} = \frac{v''(x)}{[1 + (v'(x))^2]^{3/2}},$$

$$\text{де } v'(x) = dv(x)/dx; v''(x) = d^2v(x)/dx^2.$$

Порівнюючи праві частини наведених виразів для кривизни  $1/\rho$  та нехтуючи величинами  $(v'(x))^2$  у порівнянні з одиницею, одержимо наближене диференціальне рівняння осі зігнутої балки у вигляді

$$EI_z v''(x) = M_z(x), \quad (2.38)$$



Позначивши абсолютне значення максимального прогину балки через  $|\nu_{\max}|$ , а допустиму стрілу прогину через  $[f]$ , дістанемо **умову жорсткості балки** при згинанні:

$$|\nu_{\max}| \leq [f]. \quad (2.39)$$

Допустимий прогин  $[f]$  визначають на підставі експериментальних та експлуатаційних даних.

## 2.9. Розрахунки на міцність при складному напруженому стані

### 2.9.1. Теорії міцності

При дослідженні матеріалів встановлено поняття небезпечного стану. З теорії напруженого стану відомо, що у будь-якій точці довільно навантаженого тіла завжди можна обрати три взаємно перпендикулярні головні площинки, на яких немає дотичних напружень. Нормальні напруження  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ , які виникають на головних площинках (рис. 2.45), мають назву **головних нормальних напружень**. Залежно від наявності трьох видів головних напружень, напружені стани розподіляють на лінійні, плоскі та об'ємні.

У випадку об'ємного напруженого стану, коли на елемент діють усі три напруження небезпечний стан матеріалу може виникнути при різних значеннях

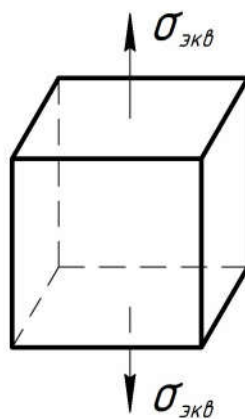
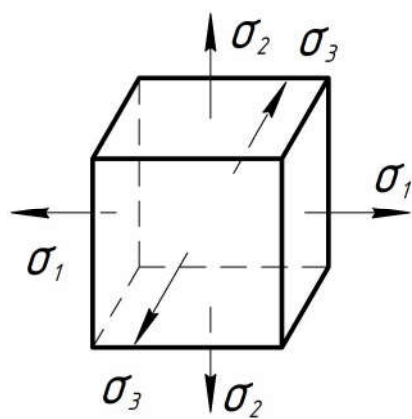


Рис. 2.45

напружень  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ . Небезпечних значень головних напружень, при яких виникає небезпечний стан у точці, безліч. Тому для практичних розрахунків доцільно встановлювати критерії небезпечного напруженого стану. Такі критерії встановлюють на основі припущення про переважний вплив на міцність матеріалу деякого фактора. Таких факторів може бути декілька.

Створено декілька теорій міцності, які при розрахунках напружень в точках при об'ємному напруженому стані пропонують використовувати небезпечні напруження, отримані при лінійному напруженому стані. При цьому міцність матеріалу у точці при об'ємному напруженому стані буде забезпечена тоді, коли **еквівалентні (розрахункові) напруження**  $\sigma_{\text{âââ}}$  в цій точці не будуть перевищувати допустиме:

$$\sigma_{\text{âââ}}^m(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \leq [\sigma] \quad (2.40)$$

де  $m$  – номер прийнятої теорії міцності.

Розглянемо коротко найбільш розповсюджені **теорії міцності**.

1. Перша – *теорія найбільших нормальних напружень* (теорія Галілея, XVII ст.).

Відповідно цій теорії небезпечний стан викликає найбільше нормальне напруження. У якості еквівалентного напруження приймають одно з головних

$$\sigma_{\hat{a}\hat{e}\hat{a}}^I = \max(\sigma_1, |\sigma_3|). \quad (2.41)$$

Ця теорія підтверджується практикою тільки для крихких матеріалів (скло, гіпс, кераміка та ін.).

2. Друга – *теорія найбільших лінійних деформацій* (теорія Маріотта, 1682 р.).

Друга теорія вважає, що міцність матеріалу буде порушена тоді, коли найбільше відносне подовження досягає небезпечної деформації.

$$\sigma_{\hat{a}\hat{e}\hat{a}}^{II} = \sigma_1 - \nu \cdot (\sigma_2 + \sigma_3). \quad (2.42)$$

Практика показує, що найбільше подовження не є визначальним фактором. Застосовується для крихких матеріалів, але у наступний час не рекомендується для використання.

3. Третя – *теорія найбільших дотичних напружень* (теорія Кулона, 1773 р.).

Небезпечний стан матеріалу наступає, коли найбільші дотичні напруження досягають границі текучості для пластичних і границі міцності для крихких матеріалів.

$$\sigma_{\hat{a}\hat{e}\hat{a}}^{III} = \sigma_1 - \sigma_3 \quad (2.43)$$

Третя теорія добре погоджується з експериментом, особливо для конструктивних елементів із пластичних матеріалів.

4. Четверта – *енергетична теорія* (теорія Губера, 1904 р.).

Обраний фактор безпеки: граничне значення питомої потенціальної енергії формозміни.

$$\sigma_{\hat{a}\hat{e}\hat{a}}^{IV} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \quad (2.44)$$

Розрахунки за цією теорією підтверджуються експериментально тільки для пластичних матеріалів.

5. П'ята – *теорія граничних напружених станів* (теорія Мора).

Відповідно цієї теорії міцність матеріалу залежить від величини і знака найбільшого  $\sigma_1$  і найменшого  $\sigma_3$  з головних напружень.

$$\sigma_{\hat{a}\hat{e}\hat{a}}^V = \sigma_1 - k \cdot \sigma_3, \quad (2.45)$$

де  $k = \sigma_{\hat{a}\hat{o}}^{\delta} / \sigma_{\hat{a}\hat{o}}^{\hat{n}}$  ;  $\sigma_{\hat{a}\hat{o}}^{\delta}$ ,  $\sigma_{\hat{a}\hat{o}}^{\hat{n}}$  – граничні напруження при випробуваннях матеріалу на розтягування та стискання (для пластичних – границя текучості, для крихких – границя міцності).

Теорія Мора універсальна, її застосовують при розрахунках і пластичних, і крихких матеріалів.

При складному опорі, тобто при різних комбінаціях простих видів опору (розтягання-стискання, кручення, згинання) напруження і переміщення визначають на основі принципу незалежності дії сил. При цьому у більшості випадків нехтують поперечними силами. Розрахунок при складному опорі виконують у такій послідовності. Спочатку будуть епюри внутрішніх зусиль, визначають з епюр місця небезпечних перерізів, визначають небезпечні точки у кожному небезпечному перерізі і розраховують найбільші еквівалентні напруження відповідно однієї з теорій міцності.

На практиці найчастіше зустрічаються такі види складного опору: косе згинання – згинання у двох площинах, згинання з розтяганням-стисканням, згинання з крученням.

### 2.9.2. Розрахунок на згинання з крученням круглих валів

Для інженерів, які працюють з приводами машин, найбільш важливим є знання методики розрахунку круглих валів на згинання з крученням.

У звичайних приводах машин на вали механічних передач діють обертальні моменти, сили ваги закріплених на них деталей, інші сили, які діють у механізмах при передачі потужності. При складанні розрахункових схем реального валу виявляється, що вал в загальному випадку згинається у просторі та скручується під дією навантаження.

Проаналізувавши напрямки передачі потужності, потрібно розрахувати зовнішні скручувальні моменти, які діють на вал, і скласти розрахункову схему вала при крученні. Для зручності розрахунків треба розкласти діючі сили на вертикальні і горизонтальні складові і побудувати, відповідно принципу незалежності дії сил, дві розрахункові схеми: згинання у вертикальній та горизонтальній площинах. Для кожної схеми навантаження побудувати епюри внутрішніх зусиль: крутного моменту  $M_k$ , згинальних моментів  $M_z$  і  $M_y$ . Епюри поперечних сил  $Q_y$  і  $Q_z$ , що виникають у валу, не будують, бо при розрахунку кручення зі згинанням дотичні напруження від згинання не враховуються. При аналізі внутрішніх зусиль виявляють декілька небезпечних перерізів вала з найбільшими значеннями внутрішніх моментів. Загальний згинальний момент у кожному небезпечному перерізі розраховують за формулою

$$M_{\hat{c}\hat{a}} = \sqrt{M_z^2 + M_y^2}.$$

Вали у машинобудуванні найчастіше виготовляють зі сталі та її сплавів. Зручно при цьому виконувати розрахунки, використовуючи 3-тю або 4-ту теорії міцності для пластичних матеріалів. Для круглих валів отримані відповідні формули розрахунку еквівалентного напруження. Умови міцності вала при згинанні з крученням мають вигляд:

третя теорія 
$$\sigma_{\hat{a}\hat{e}\hat{a}}^{III} = \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2} \leq [\sigma] \quad (2.46)$$

четверта теорія 
$$\sigma_{\hat{a}\hat{e}\hat{a}}^{IV} = \sqrt{\sigma^2 + 3 \cdot \tau^2} \leq [\sigma], \quad (2.47)$$

де  $\sigma$  – нормальні напруження при згинанні,  $\tau$  – дотичні напруження при крученні.

Враховуючи, що вал має круглий поперечний переріз, тобто  $W_p = 2W_z$ , розрахунок еквівалентного напруження можна спростити

$$\sigma_{\hat{a}\hat{e}\hat{a}}^{III(IV)} = \frac{M_{\delta i \zeta \delta}^{III(IV)}}{W_z},$$

де  $M_{\delta i \zeta \delta}^{III(IV)} = \sqrt{M_{\zeta \hat{a}}^2 + k^{III(IV)} \cdot M_k^2}$ ,  $k^{III} = 1; k^{IV} = 0,75$ .

Еквівалентне напруження розраховують для кожного з ймовірно небезпечних перерізів вала. Результат перевірки міцності валу при складному опорі – це виконання умови

$$\max \sigma_{\hat{a}\hat{e}\hat{a}} \leq [\sigma].$$

## 2.10. Стійкість стиснутих стрижнів

У багатьох випадках центрально стиснутий стрижень (рис. 2.46,а) руйнується від того, що втрачає стійкість. **Пружна рівновага** стрижня є **стійкою**, якщо при малому відхиленні від стану рівноваги він прагне повернутися до початкового стану і повністю повертається до нього після зняття навантаження. **Пружна рівновага є нестійкою**, якщо після виведення з рівноваги стрижень продовжує деформуватися і після зняття навантаження не повертається до початкового положення (рис. 2.46,в).

Між стійким та нестійким станом існують перехідний стан, який зветься **критичним** (рис. 2.46,б). При такому стані сили досягають критичної величини, стрижень зберігає початкову форму,

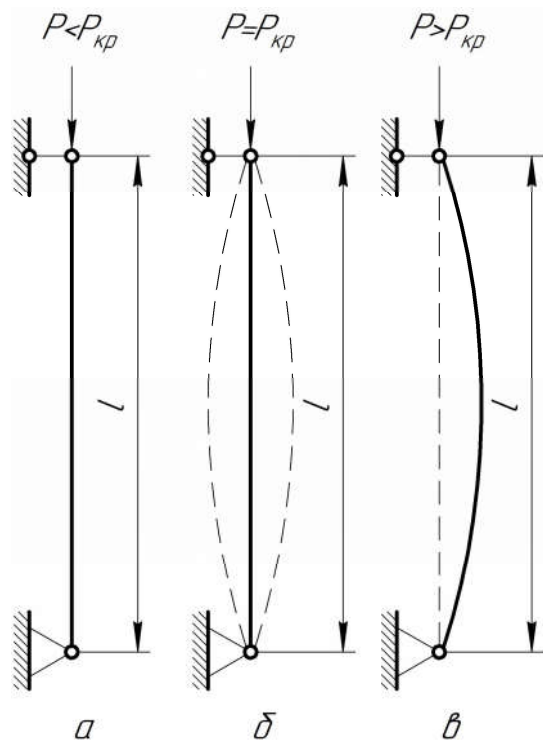


Рис. 2.46

але може втратити її при незначному зростанні навантаження. Сила, перевищення якої визиває втрату стійкості стрижня, називають **критичною силою**  $P_{кр}$ .

В реальних конструкціях критичне навантаження недопустимо. Повинна виконуватися умова стійкості стрижня

$$P \leq [P_y], \quad (2.48)$$

де  $[P_y] = P_{\epsilon\delta} / n_y$ ;  $[P_y]$  – допустиме навантаження;  $n_y$  – коефіцієнт запасу стійкості,  $n_y > 1$ .

Критичну силу центрально стиснутого стрижня при втраті стійкості у пружній стадії визначають за **формулою Ейлера**, яка з урахуванням залежності від умов закріплення стрижня має вигляд:

$$P_{\epsilon\delta} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{\min}}{(\mu \cdot l)^2}, \quad (2.49)$$

де  $l$  – довжина стрижня;  $I_{\min}$  – мінімальний момент інерції перерізу;  $\mu$  – коефіцієнт приведення довжини, який залежить від виду закріплення стрижня.

Критичне напруження визначають при певному значенні критичної сили

$$\sigma_{\epsilon\delta} = \frac{P_{\epsilon\delta}}{F}.$$

Можна критичну силу розрахувати за формулою Ейлера.

Вводимо характеристику розмірів та конструктивного рішення закріплення стрижня – гнучкість

$$\lambda = \mu l / i_{\min},$$

де  $i_{\min}$  – мінімальний радіус інерції перерізу стрижня.

Дослідження показали, що формула Ейлера для розрахунку критичного напруження справедлива тільки у випадках, коли

$$\sigma_{\epsilon\delta} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \leq \sigma_{i\delta},$$

тобто, коли гнучкість більш граничної  $\lambda \geq \lambda_{\alpha\delta} = \sqrt{\pi^2 E / \sigma_{i\delta}}$ . Якщо гнучкість менша за критичну – стержень середньої гнучкості, то використовують емпіричну формулу Ф. С. Ясинського

$$\sigma_{\epsilon\delta} = a - b \cdot \lambda,$$

де  $a$  і  $b$  – механічні сталі матеріалу і, наприклад, для Ст.3  $a = 310 \text{ МПа}$ ,  $b = 1,14 \text{ МПа}$ .

За експериментальними даними побудовані графіки зміни критичного напруження в залежності від гнучкості для різних матеріалів при  $\lambda_0 < \lambda < \lambda_{\text{ад}}$ . Якщо стрижень має малу гнучкість  $\lambda < \lambda_0$ , то критичне напруження дорівнює границі текучості для пластичних матеріалів ( $\sigma_{\text{ед}} = \sigma_0$ ) і границі міцності для крихких ( $\sigma_{\text{ед}} = \sigma_i$ ).

Розрахунки стиснутих стрижнів звичайно виконують за умовою

$$\sigma = P / F \leq [\sigma_y], \quad (2.50)$$

де  $[\sigma_y]$  – допустиме напруження на стійкість. Порівняльний аналіз допустимих напружень на стискання  $[\sigma]$  і на стійкість показав, що допустиме напруження на стійкість з урахуванням запасів міцності і стійкості має нижчі значення. Тому був введений коефіцієнт зниження основного напруження при розрахунках на стійкість  $\phi$  ( $\phi < 1$ ) і встановлений зв'язок

$$[\sigma_y] = \phi \cdot [\sigma].$$

Значення  $\phi$  для найбільш розповсюджених матеріалів при різних гнучкостях наведені у таблицях довідників [6, 7]. При необхідності підібрати розміри і форму поперечного перерізу стрижня для забезпечення його стійкості розглядається нерівність

$$F \geq P / \phi \cdot [\sigma],$$

у яку входять дві невідомі. Тому задача вирішується методом послідовних наближень [6, 7].

## ЛІТЕРАТУРА

1. Гуліда Е.М. Прикладна механіка: підручник / Е.М. Гуліда, Л.Ф. Дзюба, І.М. Ольховий; за ред. Е. М. Гуліди. – Львів : Світ, 2007. – 384 с.
2. Прикладна механіка: навч. посіб. / В.Т. Павлище, Є.В. Марченко, А.Ф. Барвінський, Ю.Г. Гаршнів; за ред. В.Т. Павлище. – Львів: «Інтелект - Захід», 2004. – 386 с.
3. Ройзман В.П. Прикладна механіка. Опір матеріалів: навч. посіб. / В.П. Ройзман. – Київ: Центр навч. л-ри, 2004. – 124 с.
4. Кіницький Я.Т. Теорія механізмів і машин: підручник / Я.Т. Кіницький. – К.: Наукова думка, 2002. – 659 с.
5. Артоболевский И.И. Теория механизмов и машин / И.И. Артоболевский – М.: Наука, 1988. – 640 с.
6. Писаренко Г.С. Опір матеріалів: підручник / Г.С. Писаренко, О.Л. Квітка, Е.С. Уманський; за ред. Г.С. Писаренка. – К.: Вища школа, 2004. – 655 с.
7. Гурняк Л. І. Опір матеріалів: навч. посіб. / Л. І. Гурняк, Ю. В. Гуцуляк, Т. Б. Юзьків. – Львів: Новий Світ, 2006. – 364 с.
8. Чиж А.О. Конспект лекцій з курсу «Опір матеріалів». Частина 1 «Міцність і жорсткість при розтяганні-стисканні, крученні, згинанні» / А.О. Чиж, М.І. Субботіна. – Одеса: ОНАХТ, 2015. – 74 с.

## ЗМІСТ

ВСТУП	3
1. ОСНОВИ ТЕОРІЇ МЕХАНІЗМІВ	5
1.1. Структурний аналіз механізмів	5
1.2. Кінематичний аналіз важільних механізмів	11
1.2.1. Аналітичний метод	12
1.2.2. Графоаналітичний метод	12
1.3. Зубчасті механізми	17
1.3.1. Кінематичний аналіз зубчастих передач з нерухомими осями	19
1.3.2. Епіциклічні передачі	21
1.3.3. Геометрія евольвентних зачеплень	23
1.3.4. Косозубі передачі	27
1.3.5. Кінематика виготовлення сполучених поверхонь зубів циліндричних евольвентних зубчастих коліс	29
1.3.6. Конічні зубчасті передачі	29
1.3.7. Гіперболоїдні передачі	32
1.4. Кулачкові механізми	34
1.4.1. Кінематичний аналіз кулачкових механізмів	36
1.5. Динамічний аналіз механізмів	39
1.5.1. Силowe дослідження механізмів	39
1.5.2. Врахування сил тертя при силовому дослідженні	44
1.5.3. Режими роботи машин і коефіцієнт корисної дії	47
1.5.4. Приведення сил і мас у плоских механізмах	51
1.5.5. Диференціальне рівняння руху механізму	54
1.5.6. Коефіцієнт нерівномірності руху механізму	57
1.5.7. Регулювання періодичних коливань кутової швидкості початкової ланки	57
2. ОСНОВИ РОЗРАХУНКІВ ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ НА МІЦНІСТЬ, ЖОРСТКІСТЬ І СТІЙКІСТЬ	58
2.1. Задачі та основні поняття опору матеріалів	58
2.2. Метод перерізів при визначенні внутрішніх силових факторів	60
2.2.1. Визначення внутрішніх зусиль, побудова епюр	61
2.3. Поняття про напруження і деформації	66
2.4. Основні гіпотези і принципи опору матеріалів	68
2.5. Розтягання-стискання елементів конструкцій	68
2.5.1. Напруження при розтяганні-стисканні, умова жорсткості	68
2.5.2. Характеристики механічних властивостей матеріалів	71
2.5.3. Допустимі напруження. Умова міцності при розтяганні-стисканні	73
2.6. Геометричні характеристики плоских перерізів стрижня	74
2.7. Зсув і кручення елементів конструкцій	77



2.7.1. Напруження і деформації при зсуві	77
2.7.2. Напруження і деформації при крученні стрижнів круглого поперечного перерізу	78
2.7.3. Умови міцності і жорсткості при крученні валів	80
2.8. Згинання елементів конструкцій	81
2.8.1. Види згинання, нормальне напруження при чистому згинанні	81
2.8.2. Умови міцності при плоскому поперечному згинанні	85
2.8.3. Деформації при згинанні	86
2.9. Розрахунки на міцність при складному напруженому стані	88
2.9.1. Теорії міцності	88
2.9.2. Розрахунок круглих валів на згинання з крученням	90
2.10. Стійкість стиснутих стрижнів	91
 ЛІТЕРАТУРА	 94