

**В.Т. Швець**

**Вища математика:  
операційне числення**

**Одеса 2015**

**ББК 22.161я73**  
УДК 517(0.75.8)

Швець Валерій Тимофійович  
Вища математика: операційне числення.  
Одеса. Видавництво ВМВ, 2015 – 138 с.

Навчальний посібник є вступом у надзвичайно важливий розділ математичної фізики - інтегральні перетворення. Він також є органічною частиною вищої математики, що є логічним продовженням такого засадничого її розділу як теорія функцій комплексної змінної. Такий місток між вищою математикою і математичною фізикою конче необхідний, оскільки дозволяє не тільки теоретично підготуватись до засвоєння широкого арсеналу методів математичної фізики але і оволодіти одними з найважливіших з них – методами інтегральних перетворень. У ньому розглянуті інтегральні перетворення Фур'є і Лапласа та їх основні властивості. Також розглянуті скінчені інтегральні перетворення Фур'є. Такий широкий виклад теорії інтегральних перетворень дозволяє на єдиній методологічній базі розглянути широкий клас задач математичної фізики без обмежень просторові розміри системи. Досить детально викладена теорія інтегрування у комплексній площині функцій, що мають в якості особливих точок полюси, скінченого порядку, суттєво особливі точки та точки галузження. На прикладі великої кількості задач математичної фізики показане застосування зазначених інтегральних перетворень до розв'язання звичайних лінійних диференційних рівнянь із сталими коефіцієнтами та їх систем, а також лінійних диференційних рівнянь з частинними похідними і із сталими коефіцієнтами.

Розрахований на студентів та аспірантів технічних вузів

Автор:

доктор фіз.-мат. наук, проф. В.Т.Швець

Рецензенти:

Доктор фіз.-мат. наук, проф. В.М. Адамян

доктор фіз.-мат. наук, проф. С.В. Козицький

доктор техн. наук, проф. В.Х.Кирилов

**ISBN 978-966-413-456-6**

© В.Т.Швець 2015

## Передмова

Цей навчальний посібник є продовженням раніше виданого навчального посібника "Спеціальні функції у задачах математичної фізики", який витримав вже два видання, і написаний на основі курсу лекцій, що протягом багатьох років читався автором для аспірантів Одеської державної академії холоду. Значна частина матеріалу використовувалась і в курсі вищої математики для студентів. Поява посібника викликана тим, що у навчальному процесі на протязі останніх років стала відчуватись гостра нестача підручників з багатьох розділів вищої математики. Особливо це стосується тих з них, що взагалі не вивчаються на молодших курсах технічних вузів у традиційних курсах вищої математики. Звичайно вони викладаються у вигляді окремих спецкурсів, або складових частин деяких технічних дисциплін. Зазначимо, що банк підручників для української вищої школи знаходиться у стадії формування, і ніша, пов'язана із інтегральними перетвореннями та їх використанням у математичній фізиці, є незаповненою.

Даний навчальний посібник планується як вступ у теорію інтегральних перетворень, тому автор зосередив свою увагу на найбільш простих інтегральних перетвореннях, а саме інтегральних перетвореннях Фур'є і Лапласа. Оскільки використання інтегральних перетворень вимагає, і це є найскладнішим технічним моментом їх застосування, обчислення контурних інтегралів у комплексній площині, то значну увагу приділено інтегруванню комплексних функцій, що мають особливості різних типів, як то: полюси скінченного порядку, суттєво особливі точки, точки галузження.

Велику увагу автор приділяє використанню інтегральних перетворень для розв'язання значної кількості задач математичної фізики, підібраних з різних розділів теоретичної і математичної фізики.

### Передмова до другого видання

Друге видання відрізняється від першого орієнтацією саме на студентів. З цією метою до навчального посібника доданий матеріал, який є обов'язковим до вивчення у курсі вищої математики технічних вузів. Посібник містить також велику кількість задач для самостійного розв'язання, поданих у вигляді контрольних робіт. Остання обставина робить зручним їх використання для контролю знань студентів. З посібника вилучена частина матеріалу підвищеної складності, що виходить за межі програми з курсу вищої математики для студентів технічних вузів.

Автор висловлює щирі вдячність доценту кафедри вищої математики Одеської державної академії холоду Анатолію Петровичу Нечаєву за уважний перегляд матеріалу, підготовленого до друку, і цінні поради.

## Оглавление

<b>ГЛАВА 1</b> .....	<b>5</b>
<b>ІНТЕГРАЛЬНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ЛАПЛАСА І ФУР'Є</b> .....	<b>5</b>
1.1. Умови існування перетворення Лапласа .....	<b>5</b>
1.2. Властивості перетворення Лапласа.....	<b>13</b>
1.3. Перетворення Фур'є .....	<b>21</b>
1.4. Умови існування перетворення Фур'є .....	<b>26</b>
1.4. Властивості перетворення Фур'є.....	<b>28</b>
1.5. Синус–перетворення Фур'є .....	<b>40</b>
1.6. Косинус–перетворення Фур'є.....	<b>45</b>
1.7. Скінчене інтегральне перетворення Фур'є .....	<b>48</b>
1.8. Одновимірне рівняння Гельмгольца .....	<b>55</b>
1.9. Метод поділу змінних .....	<b>62</b>
1.10. Задачі для самостійної роботи .....	<b>74</b>
<b>ГЛАВА 2</b> .....	<b>80</b>
<b>РІЗНІ ЗАДАЧІ ІЗ ФІЗИЧНИМ ЗМІСТОМ</b> .....	<b>80</b>
2.1. Динаміка матеріальної точки.....	<b>80</b>
2.2. Електрон в електромагнітному полі .....	<b>96</b>
2.3. Струм в електричному колі.....	<b>109</b>
2.4. Рівняння Даламбера .....	<b>122</b>
2.5. Рівняння Клайна .....	<b>129</b>
2.6. Задачі для самостійної роботи .....	<b>134</b>
<b>ЛІТЕРАТУРА</b> .....	<b>143</b>

## Глава 1

### Інтегральні перетворення Лапласа і Фур'є

Інтегральні перетворення різних типів широко використовуються при розв'язанні диференціальних та інтегральних рівнянь різних типів і становлять підвалини операційного числення<sup>1</sup>. Ідея інтегральних перетворень полягає у переході до нової невідомої функції, пов'язаної з вихідною функцією інтегральним перетворенням. При цьому звичайні лінійні диференціальні рівняння та їх системи часто можна перетворити у лінійні алгебраїчні рівняння та їх системи щодо цієї нової функції. У деяких випадках можна привести до лінійних алгебраїчних рівнянь і рівняння у частинних похідних. В інших випадках з них можна вилучити частинні похідні за деякими змінними.

Найпростішими диференціальними рівняннями математичної фізики є лінійні диференціальні рівняння із сталими коефіцієнтами. Їх алгебраїзація можлива у різний спосіб але лише застосування інтегральних перетворень дозволяє виконати цю операцію найбільш просто і отримати їх розв'язок у технічно найдосконаліший спосіб. В залежності від додаткових умов, граничних або початкових, алгебраїзація задачі досягається застосуванням або інтегрального перетворення Лапласа, або інтегрального перетворення Фур'є. Областю їх застосування також є лінійні диференціальні рівняння у частинних похідних із сталими коефіцієнтами та деякі прості інтегральні рівняння.

#### 1.1. Умови існування перетворення Лапласа

Пряме перетворення Лапласа ставить у відповідність функції  $f(t)$  дійсної змінної  $t$  (сама функція може бути і комплексною) комплексну функцію  $F(p)$  комплексної змінної  $p$  за допомогою наступного перетворення

$$F(p) = \int_0^{\infty} \exp(-pt) f(t) dt .$$

Функція  $f(t)$  називається оригіналом, а функція  $F(p)$  - зображенням за Лапласом, або Лаплас-образом. Символічно пряме перетворення Лапласа можна зобразити так

$$F(p) =: f(t) ,$$

або

$$F(p) = L\{f(t)\} .$$

Однозначність та можливість існування прямого перетворення Лапласа визначається наступними достатніми умовами:

- 1) Умова однозначності інтегралу: для  $t < 0$  всі можливі функції  $f(t) = 0$ . При невиконанні цієї умови функції, що відрізняються між собою на від'ємній дійсній півосі, матимуть однакові Лаплас-образи.
- 2) Умови існування інтегралу:

<sup>1</sup> Одним з засновників операційного числення є видатний англійський інженер, фізик і математик О.Хевісайд (1850-1925 рр.). Перші його дослідження з операційного числення надруковані у 1892-1893 рр. Також одним з засновників операційного числення є видатний український математик, професор Київського університету М.Є.Ващенко-Захарченко (1842-1913 рр.). Його монографія, присвячена операційному численню, вийшла у 1862 р.

а) Для  $t \geq 0$  на довільному скінченному проміжку дійсної осі функція  $f(t)$  має не більше ніж скінчену кількість розривів першого роду;

б) Для  $t \rightarrow \infty$  функція  $|f(t)| \leq A \exp(at)$ , тобто має скінчений показник степеню зростання  $a > 0$  ( $A > 0$  - довільна стала).

Останнє означає, що функція може зростати, при наближенні до нескінченно віддаленої точки, але це зростання не швидше за експоненційне.

Має місце наступна властивість зазначеного інтегралу.

**Теорема.** Інтеграл, що визначає пряме перетворення Лапласу, рівномірно збігається за параметром  $p$  в області  $\operatorname{Re}(p) > a$ .

**Доведення.** Оскільки, за умовою існування прямого перетворення Лапласу,  $|f(t)| \leq A \exp(at)$ , то має місце наступна оцінка:

$$\begin{aligned} |F(p)| &= \left| \int_0^{\infty} \exp(-pt) f(t) dt \right| \leq A \left| \int_0^{\infty} \exp(-pt) \exp(at) dt \right| \leq \\ &\leq A \int_0^{\infty} |\exp(-pt) \exp(at)| dt = A \int_0^{\infty} |\exp[-\operatorname{Re}(p)t] \exp[-i \operatorname{Im}(p)t] \exp(at)| dt = \\ &= A \int_0^{\infty} |\exp[-i \operatorname{Im}(p)t]| |\exp[-\operatorname{Re}(p)t] \exp(at)| dt = A \int_0^{\infty} \exp[-\operatorname{Re}(p)t] \exp(at) dt, \end{aligned}$$

оскільки

$$|\exp[-i \operatorname{Im}(p)t]| = 1,$$

а

$$|\exp[-\operatorname{Re}(p)t] \exp(at)| = \exp[-\operatorname{Re}(p)t] \exp(at).$$

Отриманий інтеграл легко обчислюється

$$\int_0^{\infty} \exp[-\operatorname{Re}(p)t] \exp(at) dt = \exp[(a - \operatorname{Re}(p))t] \frac{1}{a - \operatorname{Re}(p)} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{\operatorname{Re}(p) - a}.$$

Очевидно, що отримана нерівність має сенс лише для  $\operatorname{Re}(p) > a$  і  $a > 0$ . Якщо  $a < 0$ , то зазначений інтеграл розходиться для будь-яких  $p$ . Для доведення рівномірної збіжності інтегралу розглянемо таке дійсне додатне число  $b$ , що  $\operatorname{Re}(p) > b > a$ . Далі підсилимо попередню нерівність

$|F(p)| \leq \frac{A}{\operatorname{Re}(p) - a} \leq \frac{A}{b - a}$ . Остання нерівність свідчить, що залежний від параметру  $p$  інтеграл,

при всіх припустимих значеннях цього параметру, не перевищує за модулем дійсного додатного числа. Отже, відповідно до ознаки Веєрштраса, інтеграл за цим параметром збігається рівномірно.

Рівномірна збіжність інтегралу за параметром дозволяє його диференціювати за цим параметром в області його рівномірної збіжності, тобто для  $\operatorname{Re}(p) > a$ . Отже, функція  $F(p)$  є аналітичною функцією змінної  $p$  у цій області, оскільки диференційованість комплексної функції в кожній точці певної області необхідна і достатня умова її аналітичності в цій області. Можна показати, що функція  $F(p)$  є аналітичною функцією комплексної змінної  $p$  і у всій комплексній площині, за виключенням скінченної, або зліченої кількості її особливих точок. При цьому в області

$\operatorname{Re}(p) > a$  функція  $F(p)$  особливих точок не має. Всі особливі точки функції  $F(p)$  розташовані в області  $\operatorname{Re}(p) \leq a$ .

Функції  $t^n$ ,  $\sin(t)$ ,  $\cos(t)$ ,  $\ln(t)$ ,  $\exp(-3t)$  мають показник степеню зростання  $a = 0$ . Інтеграл завжди існує для  $\operatorname{Re}(p) > 0$ . Функція  $\exp(3t)$  має показник степеню зростання  $a = 3$ . Інтеграл завжди існує для  $\operatorname{Re}(p) > 3$ . Функція  $\exp(3t^2)$  має показник степені зростання  $a = \infty$ . Інтеграл не існує.

Обернене перетворення Лапласа (формула Мелліна) має вигляд

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \exp(pt)F(p)dp .$$

Його символічне зображення збігається з символічним зображенням прямого перетворення

$$f(t) \doteq F(p) .$$

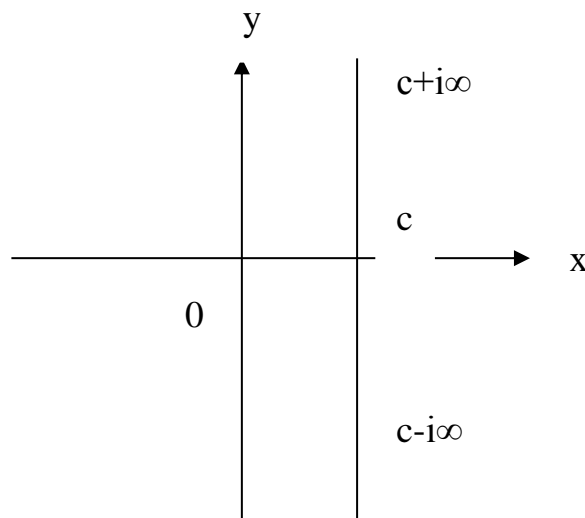
Тут інтегрування ведеться вздовж прямої, паралельної уявній осі, що перетинає дійсну вісь у точці  $z = c$

Умови існування оригіналу визначаються наступною теоремою.

**Теорема.** Нехай функція  $F(p)$  комплексної змінної  $p = x + iy$  задовольняє умовам:

- 1)  $F(p)$  є аналітичною функцією в області  $\operatorname{Re}(p) > a$  і не має тут особливих точок;
- 2) в області  $\operatorname{Re}(p) > a$  функція  $F(p)$  прямує до нуля для  $|p| \rightarrow \infty$  рівномірно щодо  $\arg(z)$ ;
- 3) для всіх  $\operatorname{Re} p > a$  збігається інтеграл

$$\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} |F(p)| dy < M , \quad c > a$$



**Малюнок 1**

**Доведення:** По-перше, доведемо, що інтеграл, присутній у формулі Мелліна, існує. Дійсно

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \exp(pt)F(p)dp \right| \leq \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} |\exp(pt)||F(p)||dp| \right| .$$

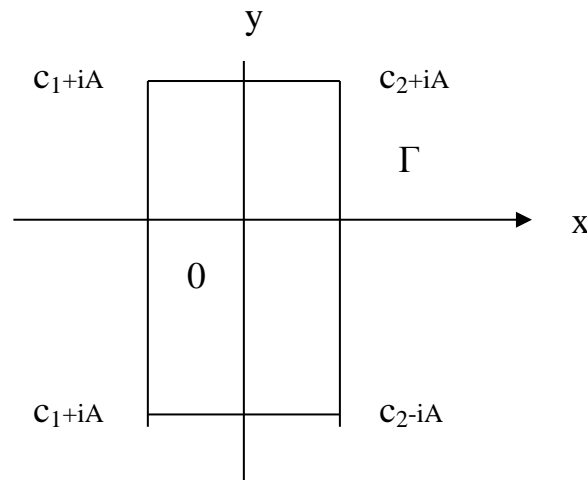
Далі перейдемо від визначеного інтегралу до інтегралу вздовж контуру  $[c - i\infty, c + i\infty]$ . Його рівнянням є  $p = c + iy$ ,  $-\infty < y < \infty$

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \exp(pt) F(p) dp \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} |\exp(pt)| |F(p)| dy =$$

$$= \frac{\exp(ct)}{2\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} |\exp(iyt)| |F(p)| dy = \frac{\exp(ct)}{2\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} |F(p)| dy \leq \frac{\exp(ct)}{2\pi} M.$$

Доведемо тепер однозначність інтегралу, тобто його незалежність від конкретного значення  $c$ , звичайно при умові, що  $c > a$ . Для цього в області  $\operatorname{Re} p > a$  розглянемо замкнений контур  $\Gamma$  прямокутної форми, що складається з відрізків:

$$\begin{aligned} [c_1 - iA, c_2 - iA], & \quad [c_2 - iA, c_2 + iA], \\ [c_2 + iA, c_1 + iA], & \quad [c_1 + iA, c_1 - iA]. \end{aligned}$$



Малюнок 2

Згідно першій умові теореми, всередині контуру, навіть для  $A \rightarrow \infty$  особливих точок немає. Тоді, згідно теоремі Коші для однозв'язаної області, інтеграл за контуром  $\Gamma$  дорівнюватиме нулю:

$$\int_{\Gamma} \exp(pt) F(p) dp = 0$$

З іншого боку,

$$\int_{\Gamma} \exp(pt) F(p) dp = \int_{c_1 - iA}^{c_2 - iA} \exp(pt) F(p) dp + \int_{c_2 - iA}^{c_2 + iA} \exp(pt) F(p) dp +$$

$$+ \int_{c_2 + iA}^{c_1 + iA} \exp(pt) F(p) dp + \int_{c_1 + iA}^{c_1 - iA} \exp(pt) F(p) dp.$$

Друга умова теореми забезпечує рівність нулю першого та третього інтегралів у правій частині останньої рівності для  $A \rightarrow \infty$

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \int_{c_1 - iA}^{c_2 - iA} \exp(pt) F(p) dp = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{c_2 + iA}^{c_1 + iA} \exp(pt) F(p) dp = 0.$$

У висліді, для  $A \rightarrow \infty$



$$\int_{c_2-i\infty}^{c_2+i\infty} \exp(pt)F(p)dp = \int_{c_1-i\infty}^{c_1+i\infty} \exp(pt)F(p)dp,$$

Отже, інтеграл у формулі Мелліна в дійсності не залежить від вибору параметру  $c$  в області  $\text{Re}(p) > a$ , тобто для  $c > a$ .

Покажемо тепер, що виконання умов існування оберненого перетворення Лапласа автоматично гарантує виконання умов існування прямого перетворення Лапласа. По-перше, доведемо, що  $f(t) = 0$  для  $t < 0$ . Оскільки в області  $\text{Re}(p) > a$  функція  $F(p)$  не має особливих точок, розглянемо замкнений контур  $\Gamma$ , складений з відрізка прямої  $[c - iR, c + iR]$ , паралельної уявній осі, і півкола  $C_R$  радіусу  $R$ . На основі теореми Коші

$$\int_{\Gamma} \exp(pt)F(p)dp = 0.$$

З іншого боку,

$$\int_{\Gamma} \exp(pt)F(p)dp = \int_{c-iR}^{c+iR} \exp(pt)F(p)dp + \int_{C_R} \exp(pt)F(p)dp$$

Наявність експоненти під знаком інтегралу нашоєхує на думку про можливість використання для обчислення інтегралу леми Жордана. Дійсно, в області  $\text{Re}(p) > a$  для від'ємних  $t$  дійсна частина показника експоненти буде від'ємною, як того вимагає лема Жордана. Відповідно до першої і другої умов даної теореми, функція  $F(p)$  теж задовольняє умовам леми Жордана. в області  $\text{Re } p > a$ . Отже,

$$\int_{C_R} \exp(pt)F(p)dp = 0.$$

У висліді

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \exp(pt)F(p)dp = 0, \text{ для } t < 0.$$

Покажемо нарешті, що якщо у формулу для прямого перетворення Лапласа замість функції  $F(p)$  підкласти формулу для оберненого перетворення Лапласа, то отримаємо вірну рівність. Таким чином,

$$\int_0^{\infty} \exp(-pt)f(t)dt = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} \exp(-pt)dt \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \exp(lt)F(l)dl.$$

У правій частині поміняємо порядок інтегрування, що можливо внаслідок рівномірної збіжності відповідних інтегралів. Наступні обчислення децю спрощуються, якщо вважати  $\text{Re}(p) > \text{Re}(l)$ .

При цьому, зрозуміло, що  $\text{Re}(p), \text{Re}(l) > 0$ . Тоді

$$\int_0^{\infty} \exp(-pt)f(t)dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(l) \int_0^{\infty} \exp[(l-p)t]dt dl = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{F(l)}{l-p} dl.$$

Оскільки інтегранда при наближенні до нескінченно віддаленої точки спадає швидше за  $1/p$ , то інтеграл за півколом нескінченно великого радіусу  $C_R$  у правій півплощині дорівнюватиме нулю. Доповнивши цим півколом відрізок  $[c - iR, c + iR]$  до замкненого кола контуру  $\Gamma$ , ми можемо для обчислення останнього інтегралу застосувати теорему про лишки. Відповідно до властивостей функції  $F(p)$  у правій півплощині ( $\text{Re}(p) > a$ ), інтегранда має лише одну особливу точку  $l = p$ , що є полюсом першого порядку. Отже

$$\int_0^{\infty} \exp(-pt) f(t) dt = F(p) ,$$

що і потрібно було довести.

Пряме перетворення Лапласа обчислюється безпосереднім інтегруванням відповідно до формули

$$F(p) = \int_0^{\infty} \exp(-pt) f(t) dt ,$$

або використанням властивостей перетворення Лапласа. Розглянемо декілька прикладів. При цьому вважатимемо, що  $\operatorname{Re}(p) > a$ , де  $a$  - показник степеню зростання функції  $f(t)$ . Фактично, це означатиме, що всі особливі точки цієї функції лежать ліворуч від лінії  $\operatorname{Re}(p) = a$ . Це не зменшує загальності результату, а просто свідчить про те, що отримана у висліді функція матиме особливості саме в області  $\operatorname{Re}(p) < a$ .

**Приклад 1.** Знайдемо зображення за Лапласом функції Хевісайда, яка визначається будь-якою з трьох формул:

$$\Theta(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases} , \quad \Theta(t) = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ 1/2, & t = 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases} \quad \Theta(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases} .$$

У теорії перетворення Лапласа ця функція важлива ще і тому, що довільна стала або функція, зображення за Лапласом якої шукається, вважається помноженою на функцію Хевісайда. Саме це забезпечує виконання однієї із умов існування прямого перетворення Лапласа – умови його однозначності.

**Розв'язання.** Очевидно, для всіх трьох означень функції Хевісайда

$$\begin{aligned} F(p) &= \int_0^{\infty} \exp(-pt) dt = -\frac{1}{p} \exp(-pt) \Big|_0^{\infty} = \\ &= -\frac{1}{p} \exp(-\operatorname{Re}(p)t - i \operatorname{Im}(p)t) \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{p} . \end{aligned}$$

Останній результат вірний в області  $\operatorname{Re}(p) > 0$ , оскільки саме тут первісна прямує до нуля на верхній межі інтегрування. Умова  $\operatorname{Re}(p) > 0$  також визначає область аналітичності зображення. Зазначимо, що порушення цієї умови свідчить лише про наявність у зображення в області  $\operatorname{Re}(p) < a$  ізолюваних особливих точок. У даному разі в цій області існує одна особлива точка  $p = 0$  - полюс першого порядку. Отже,

$$\Theta(t) = 1/p .$$

**Приклад 2.** Наступним за простотою зображенням є зображення показникової функції  $\exp(\omega t)$ .

**Розв'язання.** Необхідно обчислити інтеграл

$$F(p) = \int_0^{\infty} \exp(-pt) \exp(\omega t) dt .$$

Останній легко безпосередньо обчислюється і

$$\exp(\omega t) = 1/(p - \omega) .$$

**Приклад 3.** Знайти зображення степе- невої функції  $t^n$  для цілих додатних значень по- казника степеню.

**Розв'язання.** Необхідно обчислити інтеграл

$$F(p) = \int_0^{\infty} \exp(-pt)t^n dt .$$

Цей інтеграл обчислюється  $n$ -кратним інтегруванням частинами. Тоді

$$t^n =: n! / p^{n+1} .$$

Якщо ж показник степеню є нецілим числом, але  $n \neq 0, -1, -2, \dots$ , то відповідний інтеграл також існує, але обчислюється лише числово. Цей інтеграл називається гама-функцією. Отже, у зазна- ченому випадку,

$$t^n =: \Gamma(n+1) / p^{n+1} ,$$

де

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} \exp(-t)t^{\alpha-1} dt .$$

Для цілих додатних  $n$   $\Gamma(n+1) = n!$  Для  $n$ , що прямують до значень  $n = 0, -1, -2, \dots$ , відповідні зна- чення гама-функції прямують до  $\pm\infty$ . Фактично гама-функція є аналітичною у комплексній пло- щині скрізь, за виключенням точок  $n = 0, -1, -2, \dots$ , де вона має полюси першого порядку.

**Приклад 4.** Знайти зображення тригонометричних функцій  $\sin(t)$ ,  $\cos(t)$ , та гіперболіч- них функцій  $\sinh(t)$ ,  $\cosh(t)$ .

**Розв'язання.** Необхідно обчислити інтеграли

$$\int_0^{\infty} \exp(-pt) \sin(\omega t) dt ,$$

$$\int_0^{\infty} \exp(-pt) \cos(\omega t) dt .$$

Ці інтеграли легко обчислюються або подвійним інтегруванням частинами, або використанням формул Ейлера. Вислід має вигляд

$$\sin(t) =: \frac{1}{p^2 + 1} ,$$

$$\cos(t) =: \frac{p}{p^2 + 1} .$$

Наведемо без обговорення і зображення гіперболічних функцій:

$$\sinh(t) =: \frac{1}{p^2 - 1} ,$$

$$\cosh(t) =: \frac{p}{p^2 - 1} .$$

**Приклад 5.** Знайти зображення логарифма

**Розв'язання.** Зінтегруємо відповідний інтеграл частинами

$$\int_0^{\infty} \ln(t) \exp(-pt) dt = [t \ln(t) - t] \exp(-pt) \Big|_0^{\infty} + p \int_0^{\infty} [t \ln(t) - t] \exp(-pt) dt .$$

Оскільки показник степеню зростання логарифма дорівнює нулю, то  $\operatorname{Re}(p) > 0$  і на верхній межі зінтегрована частина дорівнює нулю. Нулю вона дорівнює і на нижній межі. Крім того

$$\int_0^{\infty} t \exp(-pt) dt = \frac{1}{p^2},$$

$$\int_0^{\infty} t \ln(t) \exp(-pt) dt = -\frac{d}{dp} \int_0^{\infty} \ln(t) \exp(-pt) dt .$$

Отже, шуканий Лаплас-образ задовольняє диференційному рівнянню

$$F(p) = -\frac{1}{p} - p \frac{dF(p)}{dp} .$$

Безпосередньою підстановкою легко переконатись, що його розв'язком є

$$F(p) = -\ln(cp) / p ,$$

де  $C$  – довільна стала. Її можна знайти з умови, яку можна розглядати як початкову для вищевказаного диференційного рівняння. Для отримання умови здиференціюємо гама-функцію

$$\frac{d}{d\alpha} \Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} \exp(-t) t^{\alpha-1} \ln(t) dt .$$

Якщо  $\alpha = 1$ , то матимемо

$$\frac{d}{d\alpha} \Gamma(1) = \int_0^{\infty} \exp(-t) \ln(t) dt .$$

Але правий останньої рівності, з одного боку, є зображенням за Лапласом логарифму для  $p = 1$ .

Отже,

$$\int_0^{\infty} \exp(-t) \ln(t) dt = F(1) .$$

З іншого боку, як звичайний визначений інтеграл, він є числом, яке зручно представити як

$$\int_0^{\infty} \exp(-t) \ln(t) dt = -\ln(c) .$$

Прирівнюючи праві частини останніх двох рівностей, матимемо бажану початкову умову для розглянутого вище диференційного рівняння

$$F(1) = -\ln(c)$$

або

$$\frac{d}{d\alpha} \Gamma(1) = -\ln(c) .$$

З останньої рівності

$$c = \exp[-\Gamma'(1)]$$

і, остаточно,

$$\ln(t) = -[\ln(p) - \Gamma'(1)] / p .$$

## 1.2. Властивості перетворення Лапласа

Найважливішою властивістю перетворення Лапласа є його лінійність. Вона означає, що зображення лінійної комбінації функцій є лінійна комбінація відповідних зображень з тими ж самими числовими коефіцієнтами. Ця властивість є наслідком відповідних властивостей інтегралів, а саме: інтеграл суми дорівнює сумі інтегралів, сталий множник можна виносити за знак інтеграла.

**Приклад 6.** Знайти зображення  $\sin(t) + 2\cos(t)$ .

**Розв'язання.** Відповідно до вище знайдених зображень тригонометричних функцій

$$\sin(t) + 2\cos(t) =: \frac{1}{p^2 + 1} + 2\frac{p}{p^2 + 1} .$$

Оскільки ядра прямого інтегрального перетворення Лапласа функція  $\exp(-pt)$ , так само як і оберненого перетворення Лапласа  $\exp(pt)$ , не змінюються при одночасній заміні  $t \rightarrow \omega t$  і  $p \rightarrow p/\omega$ , або  $p \rightarrow \omega p$  і  $t \rightarrow t/\omega$ , то має місце властивість подібності зображення і оригіналу:

$$f(\omega t) =: \frac{1}{\omega} F\left(\frac{p}{\omega}\right) ,$$

$$F(\omega t) =: \frac{1}{\omega} f\left(\frac{p}{\omega}\right) .$$

**Приклад 7.** Знайти зображення наступних функцій:  $\sin(\omega t)$ ,  $\cos(\omega t)$ ,  $\sinh(\omega t)$ ,  $\cosh(\omega t)$ .

**Розв'язання.** Згідно до наведеної вище властивості,

$$\sin(\omega t) =: \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} ,$$

$$\cos(\omega t) =: \frac{p}{p^2 + \omega^2} .$$

Очевидно, для гіперболічних функцій:

$$\sinh(\omega t) =: \frac{\omega}{p^2 - \omega^2} ,$$

$$\cosh(t) =: \frac{p}{p^2 - \omega^2} .$$

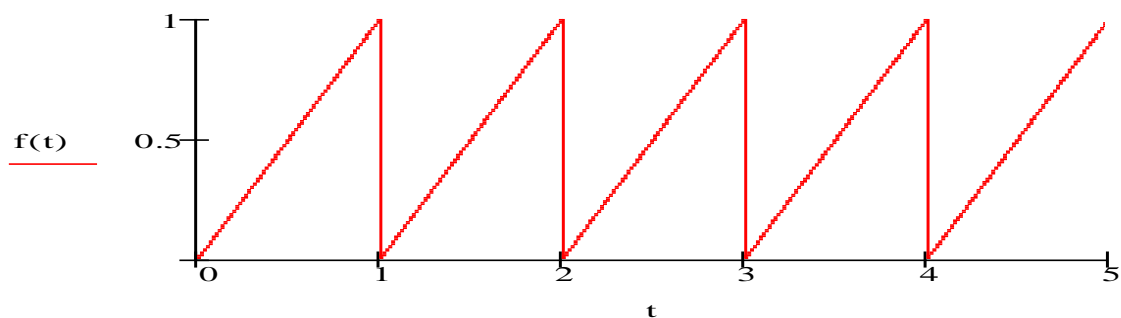
Наступна властивість суттєво спрощує інтегрування періодичних функцій. Для цих функцій  $f(t) = f(t+T)$  ( $T \neq 0$ ) і зображення визначається інтегруванням оригіналу лише на проміжку  $[0, T]$ , тобто

$$F(p) = \frac{1}{1 - \exp(pT)} \int_0^T \exp(-pt) f(t) dt .$$

**Приклад 8.** Знайти зображення наступної періодичної функції

$$f(t) = t\Theta(1-t)\Theta(t) + \dots + t\Theta(n-t)\Theta(t-n+1) + \dots .$$

Її графік наведено на наступному малюнку



Малюнок 3.

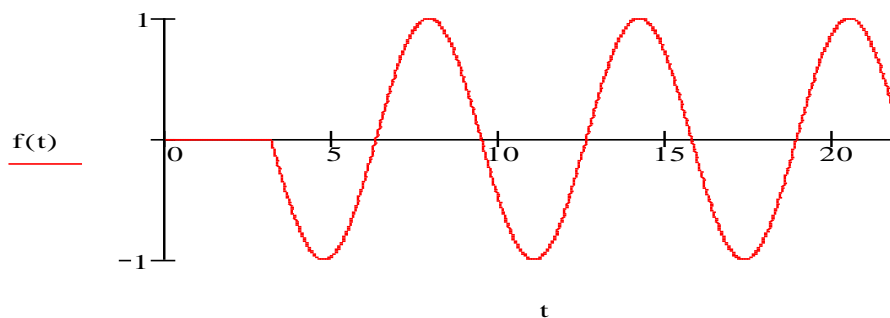
**Розв'язання.** Використовуючи відповідну властивість, отримуємо

$$F(p) = \frac{1}{1 - \exp(pT)} \int_0^T \exp(-pt) dt.$$

Інтегруючи частинами маємо

$$F(p) = \frac{1 - \exp(-pT) - Tp \exp(-pT)}{p^2 [1 - \exp(pT)]}.$$

Наступна властивість є корисною, якщо оригінал дорівнює нулю не лише для  $t < 0$ , але і для  $t < \tau$ . Дивися наступний малюнок



Малюнок 4. Графік функції  $f(t) = \sin(t)\Theta(t - \pi)$

У цьому разі для функції

$$f(t) = \varphi(t)\Theta(t - \tau)$$

зображенням буде

$$f(t) =: \exp(-p\tau)F(p),$$

де

$$F(p) =: \varphi(t).$$

Така функція  $f(t)$  може описувати зовнішнє збурення, що діє на систему не в момент початку спостереження за станом системи  $t = 0$ , а із запізненням на час  $\tau$ , тобто у момент часу  $\tau$ . Цю властивість інколи називають теоремою загаяння

**Приклад 9.** Знайти зображення функції  $f(t) = \sin(t)\Theta(t - \pi)$ .

**Розв'язання.** Відповідно до попередньої властивості,

$$\sin(t)\Theta(t - \pi) =: \exp(-pt) \frac{1}{p^2 + 1} .$$

Симетрична властивість, яку інколи називають теоремою зміщення, існує і для зображення, а саме:

$$\exp(-at)f(t) =: F(p + a) .$$

**Приклад 10.** Знайти зображення функції  $f(t) = \exp(-at)\sin(t)$ .

**Розв'язання.** Відповідно до попередньої властивості,

$$\exp(-at)\sin(t) =: \frac{1}{(p + a)^2 + 1} .$$

Інтегральне перетворення Лапласа здатне "перетворювати" в алгебраїчні такі операції як диференціювання та інтегрування. Так множення оригіналу на аргумент еквівалентне диференціюванню зображення. Диференціювання оригіналу еквівалентне множенню зображення на аргумент. У цьому разі вислід залежить від значення оригіналу у початку координат. Повна симетрія цих властивостей відсутня через несиметричність прямого і оберненого перетворень Лапласа. Розглянемо ці дві властивості. Отже,

$$t^n f(t) = (-1)^n \frac{d^n F(p)}{dp^n} .$$

**Приклад 11.** Знайти зображення функції  $f(t) = t \sin(t)$ .

**Розв'язання.** Відповідно до попередньої властивості,

$$t \sin(t) =: -\frac{d}{dp} \frac{1}{p^2 + 1} = \frac{2p}{(p^2 + 1)^2} .$$

Зображення похідної є важливою властивістю перетворення Лапласа, оскільки саме вона дозволяє легко розв'язувати звичайні лінійні диференційні рівняння із сталими коефіцієнтами та їх системи, лінійні диференційні рівняння із сталими коефіцієнтами із частинними похідними та їх системи. Необхідною умовою успішного застосування цієї властивості є наявність додаткових умов, що мають характер початкових. Отже,

$$\frac{d^n f(t)}{dt^n} =: p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - \dots - \frac{d^{n-1} f(0)}{dt^{n-1}} .$$

Ця властивість легко перевіряється безпосереднім інтегруванням частинами відповідного інтегралу. У разі похідної першого порядку

$$\frac{df(t)}{dt} =: pF(p) - f(0) .$$

Подібним же чином можна перевірити і наступні властивості.

**Приклад 12.** Знайти зображення функції  $f(t) = t \frac{d \sin(t)}{dt}$ .

**Розв'язання.** Відповідно до попередньої властивості,

$$t \frac{d \sin(t)}{dt} =: -\frac{d}{dp} \frac{p}{p^2 + 1} = \frac{p^2 - 1}{(p^2 + 1)^2} .$$

Наступна властивість має вигляд

$$\left( \frac{d}{dt} t \right)^n f(t) =: \left( -p \frac{d}{dp} \right)^n F(p) .$$

Похідна у лівій частині останнього рівняння діє і на функцію  $f(t)$ .

**Приклад 13.** Знайти зображення функції  $f(t) = \frac{d}{dt} t \sin(t)$ .

**Розв'язання.** Відповідно до попередньої властивості,

$$\frac{d}{dt} t \sin(t) =: -p \frac{d}{dp} \frac{1}{p^2 + 1} = \frac{2p^2}{(p^2 + 1)^2} .$$

Наступні властивості є комбінацією попередніх властивостей:

$$t^m \frac{d^n f(t)}{dt^n} =: \left( -\frac{d}{dp} \right)^m [p^n F(p)] , \quad m \geq n ,$$

$$\frac{d^n}{dt^n} [t^m f(t)] =: (-1)^m p^n \frac{d^m F(p)}{dp^m} , \quad m \geq n .$$

Більш складними останні дві властивості є у разі  $m < n$ .

Наступні властивості мають широке застосування для розв'язання інтегральних рівнянь. Вони мають більшу симетрію, ніж відповідні властивості щодо операції диференціювання.

$$\frac{f(t)}{t^n} =: \int_p^\infty dp \dots \int_p^\infty F(p') dp' .$$

**Приклад 14.** Знайти зображення функції  $f(t) = \sin(t) / t$ .

**Розв'язання.** Відповідно до попередньої властивості,

$$\frac{\sin(t)}{t} =: \int_p^\infty \frac{dp}{p^2 + 1} = \frac{\pi}{2} - \arctan(p) .$$

Властивість зображення інтегралу має вигляд

$$\int_0^{t_1} dt_1 \dots \int_0^{t_n} f(\tau) d\tau =: \frac{F(p)}{p^n} .$$

**Приклад 15.** Знайти зображення функції  $f(t) = \int_0^t \sin(\tau) d\tau$ .

**Розв'язання.** Відповідно до попередньої властивості,

$$\int_0^t \sin(\tau) d\tau =: \frac{1}{p} \frac{1}{p^2 + 1} .$$

Особливо важливим типом інтегралів є інтеграли типу згортки. Саме вони часто зустрічаються в інтегральних рівняннях. Інтегральне перетворення Лапласа перетворює їх у добуток зображень, одночасно перетворюючи інтегральний член рівняння в алгебраїчний. Отже,

$$\int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau =: F_1(p) F_2(p) ,$$

де

$$f_1(t) =: F_1(p) ,$$

$$f_2(t) =: F_2(p) .$$

**Приклад 16.** Знайти зображення функції  $\int_0^t (t - \tau) \sin(\tau) d\tau$ .

**Розв'язання.** Відповідно до попередньої властивості,



$$\int_0^t (t-\tau) \sin(\tau) d\tau =: \frac{1}{p^2(p^2+1)} .$$

Тут

$$\sin(t) =: \frac{1}{p^2+1} , \quad t =: \frac{1}{p^2} .$$

### Межові теореми.

1. Якщо  $F(p) =: f(t)$ , то

$$\lim_{p \rightarrow \infty} pF(p) = \lim_{t \rightarrow 0+0} f(t) .$$

**Доведення.** Згідно необхідній умові існування зображення  $\lim_{p \rightarrow \infty} F(p) = 0$  (вимога леми Жордана). Ця умова вірна і для похідних всіх порядків від зображення. Запишемо це співвідношення для зображення першої похідної  $df(t)/dt =: pF(p) - f(0)$ . Тоді отримуємо  $\lim_{p \rightarrow \infty} [pF(p) - f(0)] = 0$ ,

або  $\lim_{p \rightarrow \infty} pF(p) = \lim_{t \rightarrow 0+0} f(t)$ .

2. Якщо  $F(p) =: f(t)$ , то

$$\lim_{p \rightarrow 0} pF(p) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) .$$

**Доведення.** Розглянемо рівність, що визначає зображення похідної

$$\int_0^{\infty} \exp(-pt) \frac{df(t)}{dt} dt = pF(p) - f(0)$$

і виконаємо у ній межовий перехід

$$\lim_{p \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \exp(-pt) \frac{df(t)}{dt} dt = \lim_{p \rightarrow 0} pF(p) - f(0) .$$

Але інтеграл у лівій частині останньої рівності можна обчислити при зазначеному межовому переходу. Дійсно, рівномірна збіжність інтегралу у лівій частині за параметром  $p$  дозволяє поміняти місцями операції межового переходу і інтегрування. Отже,

$$\lim_{p \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \exp(-pt) \frac{df(t)}{dt} dt = \int_0^{\infty} \lim_{p \rightarrow 0} \exp(-pt) \frac{df(t)}{dt} dt = \int_0^{\infty} \frac{df(t)}{dt} dt .$$

Отриманий інтеграл вже легко обчислити

$$\int_0^{\infty} \frac{df(\tau)}{d\tau} d\tau = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \frac{df(\tau)}{d\tau} d\tau = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) - f(0) .$$

Звідки і випливає твердження теореми. Зрозуміло, що в обох теоремах припускається існування відповідних меж функції  $f(t)$ .

**Інтеграл Дюамеля<sup>2</sup>.** Цей інтеграл визначає одну з властивостей згортки у разі, коли під знак інтегралу входить похідна однієї з функцій

$$\int_0^t \frac{d\varphi(\tau)}{d\tau} f(t-\tau) d\tau + f(t)\varphi(0) =: pF(p)\Phi(p) .$$

**Доведення.** Доведення базується на використанні формули

<sup>2</sup> Дюамель Жан Марі Констан (5.02.1797 - 29.04.1872) - французький математик, член Паризької акад.мії наук. Головні роботи присвячені різним питанням математичної фізики.

$$\frac{d}{dt} \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(t, \tau) d\tau = \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{d}{dt} f(t, \tau) d\tau + f[t, \beta(t)] \frac{d\beta(t)}{dt} - f[t, \alpha(t)] \frac{d\alpha(t)}{dt} .$$

Застосовуючи її до згортки, матимемо

$$\frac{d}{dt} \int_0^t f(\tau) \varphi(t-\tau) d\tau = \int_0^t f(\tau) \frac{d}{dt} \varphi(t-\tau) d\tau + f(t) \varphi(0) .$$

Нехай  $f(t) =: F(p)$  ,  $\varphi(t) =: \Phi(p)$  ,  $\frac{d\varphi(t)}{dt} =: p\Phi(p) - \varphi(0)$

Тоді

$$\int_0^t f(\tau) \frac{d}{dt} \varphi(t-\tau) d\tau + f(t) \varphi(0) =: pF(p)\Phi(p)$$

, що і треба було довести.

Той факт, що Лаплас-образ  $F(p)$  є аналітичною функцією, дозволяє використати при обчисленні оберненого перетворення Лапласу потужний арсенал методів теорії аналітичних функцій. Найважливішими теоремами, на яких базуються ці методи є теорема Коші для однозв'язаної області, теорема про лишки, лема Жордана.

При обчисленні, наприклад, оберненого перетворення Лапласу нам доводиться обчислювати інтеграл вздовж прямої у комплексній площині, паралельної уявній осі. Для застосування теореми про лишки, нам потрібно доповнити зазначену пряму до замкненого контуру. При цьому форма замкненого контуру обирається так, щоб інтеграл вздовж зазначеного доповнення або легко обчислювався, або дорівнював нулю. Дуже часто таким зручним доповненням обирається півколо нескінченно великого радіусу у лівій півплощині у разі, якщо інтегранда має всередині цього контуру лише ізольовані особливі точки типу полюсів. Тоді до цього інтегралу можна застосувати і теорему про лишки, і лему Жордана. У висліді

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \exp(pt) F(p) dp = \sum_{n=1}^N \text{res}[\exp(pt) F(p), p_n] .$$

Лишки тут беруться в усіх особливих точках інтегранди, крім нескінченно віддаленої точки. Якщо серед особливих точок зображення є точки галуження, то контур інтегрування може бути досить складним і обчислення кожного такого інтегралу є окремою задачею. Знаходження оригіналу за відомим зображенням є набагато складнішою задачею, ніж знаходження зображення за відомим оригіналом.

Основні властивості інтегрального перетворення Лапласа яскраво виявляються при розв'язанні наступної задачі.

**Струм в електричному колі.** Розглянемо наступне рівняння

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau = E$$

з початковою умовою

$$i(0) = 0 .$$

Це рівняння описує електричний струм у колі, що виникає при його замиканні у момент часу  $t = 0$ . Коло містить послідовно ввімкнені активний опір  $R$ , котушку з індуктивністю  $L$ , кон-

денсатор з ємністю  $C$ , джерело постійного струму з електрорушійною силою (е.р.с.)  $E$ . Рівняння є законом Ома для зазначеного замкненого кола

$$U_L + U_R + U_C = E.$$

Тут падіння напруги на котушці

$$U_L(t) = L \frac{di(t)}{dt},$$

падіння напруги на активному опорі

$$U_R(t) = Li(t),$$

падіння напруги на ємності

$$U_C = \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau.$$

Заряд, що нагромаджується на обкладинках конденсатора у момент часу  $t$ , за умови, що при  $t = 0$  він дорівнював нулю, визначається формулою  $\int_0^t i(\tau) d\tau$ . У даній задачі стаціонарний режим відсутній і використання інтегрального перетворення Фур'є не має сенсу. Точніше, йому відповідає нульовий струм. Відповідно доцільним є використання інтегрального перетворення Лапласа.

Припустимо, що зображення невідомої функції існує

$$i(t) \equiv I(p).$$

Тоді за властивістю зображення похідної маємо

$$\frac{di(t)}{dt} \equiv pI(p) - i(0) = pI(p).$$

Відповідно до властивості зображення інтегралу

$$\int_0^t i(\tau) d\tau \equiv \frac{I(p)}{p}.$$

Нарешті, зображення сталої визначається так

$$E \equiv E/p$$

Підстановка знайдених Лаплас-образів у рівняння надає йому вигляду

$$LpI(p) + RI(p) + \frac{1}{Cp} I(p) = \frac{E}{p}.$$

Звідки

$$I(p) = \frac{E}{Lp^2 + Rp + 1/C}.$$

Виділимо у знаменнику останнього виразу повний квадрат, тоді

$$I(p) = \frac{E}{L\omega} \frac{\omega}{(p + \tau^{-1})^2 + \omega^2}.$$

Тут ми ввели наступні позначення:

$$\tau^{-1} = \frac{R}{2L}, \quad \omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}.$$

Перша з введених величин має розмірність часу, друга - частоти. Оригінал у нашому випадку може бути знайденим без явного використання формули Мелліна. Для цього достатньо використати відоме табличне зображення

$$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2} =: \sin(\omega t) ,$$

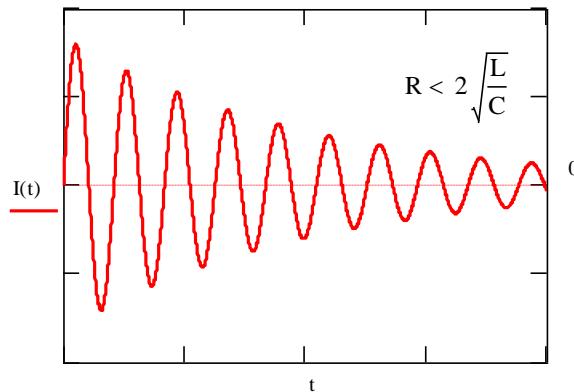
та теорему зсуву

$$F(p + a) =: \exp(-at)f(t) .$$

У висліді

$$i(t) = \frac{E}{L\omega} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \sin(\omega t) .$$

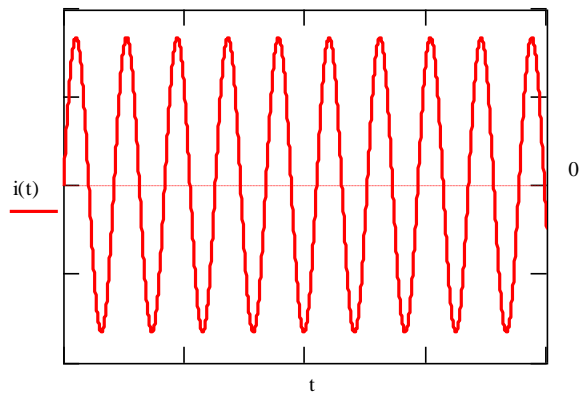
За умови  $\frac{L}{C} > \frac{R^2}{4}$  величина  $\omega$  є дійсною і додатною і має сенс частоти електромагнітних коливань у колі. Це можливо у разі малого активного опору або великої індуктивності котушки та відносно малої ємності конденсатора. Електричний струм матиме коливальний характер, що нагадує гармонійні коливання але із експоненційно спадною амплітудою (див. наступний малюнок).



**Малюнок 5.**

Тут  $\tau$  має сенс часу релаксації, тобто часу, за який амплітуда коливань зменшується у  $e$  разів. При цьому, чим більшим є активний опір кола, тим меншим є  $\tau$ . Чим більшою є індуктивність котушки, тим більшим є  $\tau$ . Цікаво, що від ємності час релаксації не залежить. При відсутності активного опору коливання будуть не затухаючими, точніше гармонійними з амплітудою  $E/L\omega$  (див. наступний малюнок)

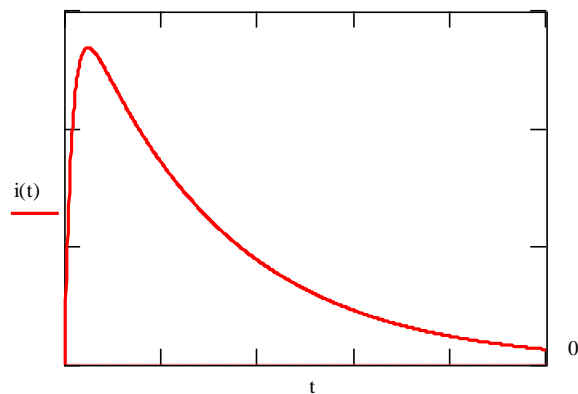
$$i(t) = \frac{E}{L\omega} \sin(\omega t) .$$



**Малюнок 6.**

Саме в останньому разі у колі спостерігатимуться незатухаючі коливання струму. При виконанні протилежної умови  $L/C < R^2/4$  величина  $\omega$  стає уявною величиною  $\omega = i|\omega|$  і вже не є частотою. Струм тепер буде змінюватись за законом (дивися наступний малюнок)

$$i(t) = \frac{E}{L|\omega|} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \sinh(|\omega|t)$$



**Малюнок 7.**

Тут використано відомий зв'язок між синусом тригонометричним уявного аргументу і синусом гіперболічним. У цьому разі коливань спостерігатись не буде. Струм, зростаючи від нуля, один раз пройде через максимальне значення, а далі експоненційно спадатиме до нуля.

### 1.3. Перетворення Фур'є

**Експоненційне перетворення Фур'є.** Пряме і обернене інтегральні перетворення Фур'є найбільш симетричні серед інших інтегральних перетворень. Разом з тим існує багато варіантів запису цих перетворень. У випадку інтегрального перетворення, здійснюваного за просторовою змінною, використовується така пара виразів:

$$g(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ikx) f(x) dx ,$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ikx) g(k) dk$$

для прямого та оберненого перетворень Фур'є відповідно. Інколи використовують і симетричніший запис:

$$g(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ikx) f(x) dx ,$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ikx) g(k) dk .$$

У разі інтегрального перетворення здійснюваного за часовою змінною, використовується така пара виразів:

$$g(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\omega t) f(t) dt ,$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\omega t) g(\omega) d\omega .$$

Тут теж можливі і інший варіант запису коефіцієнтів перед інтегралами.

У разі, якщо функція залежить і від координати, і від часу, інтегральне перетворення Фур'є відразу за обома аргументами має вигляд

$$g(k, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-i(kx - \omega t)] f(x, t) dt dx ,$$

$$f(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[i(kx - \omega t)] g(k, \omega) d\omega dk .$$

Зазначимо, що рівняння плоскої хвилі з амплітудою  $A$ , хвильовим вектором  $k$  і частотою  $\omega$ , що розповсюджується вздовж осі  $X$  у додатному напрямку, має вигляд

$$u(x, t) = A \exp[i(kx - \omega t)] .$$

Отже, обернене перетворення Фур'є функції координати і часу є її представлення у вигляді суперпозиції таких плоских хвиль. Інтегральні перетворення Фур'є окремо за координатою і окремо за часом є частинними випадками наведеного представлення. Звідси і прийняті нами варіанти для знаків у показниках експонент, які є ядрами відповідних перетворень.

**Приклад 17.** Знайти Фур'є-образ функції

$$f(x) = \exp(-a |x|) .$$

**Розв'язання.** Функція  $f(x)$  є неперервною і абсолютно інтегрованою на дійсній осі. За означенням

$$g(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ikx) \exp(-a |x|) dx =$$

$$= \int_{-\infty}^0 \exp(-ikx) \exp(-a |x|) dx + \int_0^{\infty} \exp(-ikx) \exp(-ax) dx =$$

$$= \int_0^{\infty} \exp(ikx) \exp(-ax) dx + \int_0^{\infty} \exp(-ikx) \exp(-ax) dx = \frac{1}{a - ik} + \frac{1}{a + ik} ,$$

або

$$g(k) = \frac{2a}{a^2 + k^2}.$$

Очевидно, що знайдений Фур'є-образ теж є функцією, абсолютно інтегрованою на дійсній осі.

**Приклад 18.** Знайти Фур'є-образ функції

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq a \\ 0, & |x| > a \end{cases}.$$

**Розв'язання.** Функція  $f(x)$  є розривною, але абсолютно інтегрованою на дійсній осі. За означенням

$$g(k) = \int_{-a}^a \exp(-ikx) dx.,$$

або

$$g(k) = \frac{2}{k} \sin(kx)$$

Цікавим тут є те, що знайдений Фур'є-образ не належить до абсолютно інтегрованих функцій.

**Приклад 19.** Знайти Фур'є-образ функції

$$f(x) = \exp(-ax^2).$$

**Розв'язання.** Функція  $f(x)$  є неперервною і абсолютно інтегрованою на дійсній осі. За означенням

$$g(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ikx) \exp(-ax^2) dx$$

Виділимо у показнику експоненти повний квадрат

$$\begin{aligned} g(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[ -a \left( x + i \frac{k}{2a} \right)^2 - \frac{k^2}{4a} \right] dx = \\ &= \exp \left( -\frac{k^2}{4a} \right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[ -a \left( x + i \frac{k}{2a} \right)^2 \right] dx. \end{aligned}$$

В останньому інтегралі перейдемо до нової змінної  $z = x + ik/2a$ .

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[ -a \left( x + i \frac{k}{2a} \right)^2 \right] dx = \int_{-\infty + ik/2a}^{\infty + ik/2a} \exp(-az^2) dz.$$

Врахуємо далі той факт, що інтегранда є аналітичною і її єдиною особливою точкою є нескінченно віддалена точка. У цьому разі інтеграл не залежатиме від того, вздовж якої саме прямої, що відстоїть на скінченній відстані від дійсної осі і паралельної їй, він береться. Отже, наш інтеграл безпосередньо приводиться до інтегралу Пуассона

$$\int_{-\infty + ik/2a}^{\infty + ik/2a} \exp(-az^2) dz = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-az^2) dz = \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

Остаточний результат має вигляд

$$g(k) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp \left( -\frac{k^2}{4a} \right).$$

Знайдений Фур'є-образ є абсолютно інтегрованою функцією і, фактично, якщо не враховувати числові коефіцієнти, збігається з оригіналом.

**Приклад 20.** Знайти Фур'є-образ функції

$$f(x) = \sin(x).$$

**Розв'язання.** Функція  $f(x)$  неперервна але не абсолютно інтегрована на дійсній осі. Нескінченно віддалена точка є її суттєво особливою точкою і інтеграл вздовж дійсної осі у класичному сенсі не існує. Важливим є те, що при наближенні до нескінченно віддаленої точки функція залишається скінченною. Отже, мова може йти лише про Фур'є-образ цієї функції в сенсі узагальненого перетворення Фур'є. Нижче ми покажемо, що Фур'є-образ цієї функції в узагальненому сенсі існує, але є не класичною, а узагальненою функцією. Таким чином

$$g(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ikx) \sin(x) dx .$$

Для обчислення інтегралу використаємо формулу Ейлера

$$\sin(x) = \frac{1}{2i} [\exp(ix) - \exp(-ix)] .$$

Тоді інтеграл можна представити у вигляді суми двох інтегралів

$$g(k) = \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-i(k-1)x] dx - \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-i(k+1)x] dx .$$

За означенням узагальненої функції - дельта-функції Дірака

$$\delta(k \pm 1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-i(k \pm 1)x] dx ,$$

де спроба локального означення дельта функції приводить до результату

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases} .$$

Інтегральне ж означення дельта-функції таке

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1 .$$

Фактично дельта-функція є функціоналом що ставить у відповідність кожній функції з певного класу число за законом

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x) dx = f(0) .$$

Тому шуканий Фур'є-образ має вигляд

$$\sin(x) := i\pi [\delta(k+1) - \delta(k-1)] .$$

Аналогічним чином можна знайти і наступний Фур'є-образ

$$\cos(x) := \pi [\delta(k+1) + \delta(k-1)] .$$

Кулонівський потенціал відіграє провідну роль у теоретичній фізиці та інших природничих науках, тому розглянемо детально обчислення його Фур'є-образу для найпоширеніших випадків.

### **Фур'є-образ кулонівського потенціалу. Тривимірний випадок.**

Кулонівський потенціал, створюваний одиничним зарядом, розташованим у початку координат, має вигляд

$$v(r) = 1/r ,$$

де  $r$  - відстань від початку координат. Розглянемо також більш складний потенціал

$$u(r) = \frac{1}{r} \exp(\Delta r) , \Delta > 0 .$$

Цей потенціал спадає **швидше** з відстанню ніж кулонівський. Це забезпечує існування відповідних інтегралів і саме Фур'є-образ цього потенціалу ми і будемо шукати. За означенням

$$U(\mathbf{q}) = \int \exp(-i\mathbf{q}\mathbf{r}) u(r) d\mathbf{r} .$$



У сферичних координатах з полярною віссю, спрямованою за вектором  $\mathbf{q}$

$$U(\mathbf{q}) = 2\pi \int_0^{\infty} dr r \int_0^{\pi} \exp[-iqr \cos(\theta)] \exp(-\Delta r) \sin(\theta) d\theta .$$

Обчислимо внутрішній інтеграл

$$\int_0^{\pi} \exp[-iqr \cos(\theta)] \sin(\theta) d\theta = \int_{-1}^1 \exp(-iqr x) dx = \frac{1}{iqr} [\exp(iqr) - \exp(-iqr)] .$$

Тоді

$$U(\mathbf{q}) = \frac{2\pi}{iq} \int_0^{\infty} [\exp(iqr) - \exp(-iqr)] \exp(-\Delta r) dr = \frac{4\pi}{q^2 + \Delta^2}$$

Якщо  $\Delta \rightarrow 0$ , то маємо Фур'є-образ кулонівського потенціалу. Отже,

$$U(\mathbf{q}) = \frac{4\pi}{q^2 + \Delta^2}$$

і, відповідно,

$$V(\mathbf{q}) = 4\pi / q^2 .$$

Якби ми відразу шукали Фур'є-образ кулонівського потенціалу, то наштовхнулись би на необхідність обчислення інтегралу, інтегранда якого не має у нескінченності конкретного значення, хоча і залишається обмеженою. Виявляється, що при введенні додаткового, як завгодно малого, експоненційного затухання інтегранда вже прямує до нуля, забезпечуючи існування відповідного інтегралу.

### Фур'є-образ кулонівського потенціалу. Двовимірний випадок

У двовимірному випадку кулонівський потенціал, створюваний зарядом, що міститься у початку координат, є таким

$$v(r) = 1/r ,$$

де  $r^2 = x^2 + y^2$ . Його Фур'є-образ визначається за формулою

$$V(q) = \int v(r) \exp(-i\mathbf{q}\mathbf{r}) d\mathbf{r} .$$

При обчисленні цього інтегралу виникають ті ж проблеми, що і у тривимірному випадку. Для їх розв'язання використаємо, для різноманіття, інший метод, запозичений з теорії узагальнених функцій. Інтеграл доцільно обчислювати у полярній системі координат. Тоді

$$V(q) = \int_0^{\infty} dr r v(r) \int_0^{2\pi} \exp[-iqr \cos(\varphi)] d\varphi .$$

Далі підставимо під знак інтеграла функцію  $v(r)$  і поміняємо порядок інтегрування. У висліді

$$V(q) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} \exp[-iqr \cos(\varphi)] dr .$$

Значення інтегранди у нескінченності невизначене. Це унеможливило безпосереднє обчислення інтегралу. Поведінку інтегранди на дійсній осі можна трохи відкорегувати, зробивши її значення у нескінченності визначеним і рівним нулю. Для цього слід надати хвильовому вектору  $q$  уявну доданку  $-i\delta$ . Фактично ми обчислюємо інший інтеграл, який, однак, у межі  $\delta \rightarrow 0$  збігається з вихідним. Тепер

$$V(q) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} \exp[-iqr \cos(\varphi) - \delta r] dr .$$

Після обчислення внутрішнього інтегралу

$$V(q) = -i \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{q \cos(\varphi) - i\delta}.$$

Відповідно до формули Сохоцького

$$\frac{1}{x + i\delta} = P \frac{1}{x} - i\pi\delta(x).$$

Фур'є-образ можна представити так

$$V(q) = -i \frac{1}{q} P \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\cos(\varphi)} + \frac{\pi}{q} \int_0^{2\pi} \delta[\cos(\varphi)] d\varphi.$$

Перший інтеграл у правій частині є табличним і

$$P \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\cos(\varphi)} = \frac{1}{2} \ln \left[ \frac{1 + \sin(\varphi)}{1 - \sin(\varphi)} \right] \Big|_0^{2\pi} = 0.$$

Другий інтеграл розпадеться на суму двох інтегралів відповідно до кількості нулів аргументу дельта-функції

$$\int_0^{2\pi} \delta[\cos(\varphi)] d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{\delta(\varphi - \pi/2)}{\left| \frac{d \cos(\varphi)}{d\varphi} \right|_{\varphi=\pi/2}} d\varphi + \int_0^{2\pi} \frac{\delta(\varphi - 3\pi/4)}{\left| \frac{d \cos(\varphi)}{d\varphi} \right|_{\varphi=3\pi/4}} d\varphi = 2.$$

Остаточний результат буде таким

$$V(q) = 2\pi / q.$$

#### 1.4. Умови існування перетворення Фур'є

Достатніх умов існування прямого і оберненого перетворень Фур'є багато.

Одна з них полягає у тому, що функції  $g(x)$  і  $f(x)$  мають бути абсолютно інтегрованими на всій дійсній осі

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty, \quad \int_{-\infty}^{\infty} |g(k)| dk < \infty,$$

тобто належати до функційного простору  $L_1(-\infty, \infty)$ . Прикладом такої функції є функція

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \text{ або } f(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|}} \frac{1}{1+x^2}.$$

Друга полягає у тому, що функції  $g(x)$  і  $f(x)$  мають інтегрований квадрат

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty, \quad \int_{-\infty}^{\infty} |g(k)|^2 dk < \infty,$$

Тобто належать до функційного простору  $L_2(-\infty, \infty)$ . Прикладом такої функції є функція

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} \text{ або } f(x) = \frac{\sin(x)}{x}.$$

Звернімо увагу, що перша з цих двох функцій належить і функційному простору  $L_1(-\infty, \infty)$ , друга – ні. Тобто друга функція має інтегрований квадрат але не є абсолютно інтегрованою.

Часто перетворенню Фур'є піддаються функції, що належать функційному простору Шварца  $S$ . Його елементами є функції, що мають похідні всіх порядків, тобто  $f(x) \in C^\infty(-\infty, \infty)$ , і при  $x \rightarrow \pm\infty$  всі похідні прямують до нуля швидше ніж функція  $1/x^n$  при довільному  $n$ . Прикладом

такої функції є функція  $f(x) = \exp(-x^2)$ . Видно, що ця функція належить і простору  $L_1(-\infty, \infty)$  і простору  $L_2(-\infty, \infty)$ . До речі, всі елементи простору Шварца належать перетину просторів  $L_1(-\infty, \infty)$  і  $L_2(-\infty, \infty)$ .

Легко навести приклад функції, що не належить до жодного з розглянутих просторів, наприклад,  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+|x|}}$ . До речі, у даному разі Фур'є-образ такої функції не існує.

Наведений перелік достатніх умов не є вичерпним. Локальні властивості зазначених функцій є наслідком наведених інтегральних умов. Зокрема достатні умови дозволяють існування у функцій на довільному скінченному проміжку скінченної кількості розривів першого роду, або інших інтегрованих особливостей. Для всіх наведених функційних просторів пряме і обернене перетворення Фур'є мають однаковий запис і сенс але властивості перетворення Фур'є в різних функційних просторах можуть відрізнятись між собою.

Базовим функційним простором в теорії інтегрального перетворення Фур'є вважається функційний простір  $L_1(-\infty, \infty)$ . Нижче ми розглянемо деякі найважливіші властивості перетворення Фур'є саме для цього простору. Вони також стосуватимуться функцій з простору  $L_2(-\infty, \infty)$ , що належатимуть перерізу  $L_1(-\infty, \infty)$  і  $L_2(-\infty, \infty)$  і всіх функцій з простору Шварца. В інших випадках збереження цих властивостей слід перевіряти окремо..

Для подальшого зробимо два важливі зауваження. Перше полягає у тому, що приналежність функції  $f(x)$  до функційного простору  $L_1(-\infty, \infty)$  ще не означає, що її Фур'є-образ  $g(k)$  також належатиме до цього простору. Наприклад, для функції

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq a, \\ 0, & |x| > a \end{cases}$$

що є елементом простору  $L_1(-\infty, \infty)$ , Фур'є-образом буде функція

$$g(k) = \frac{2 \sin(ka)}{k},$$

що до цього простору не належить але належить до простору  $L_2(-\infty, \infty)$ . Так що вимога одночасної приналежності функцій  $f(x)$  і  $g(k)$  до простору  $L_1(-\infty, \infty)$  є занадто обтяжливою. Рештнього слід вимагати лише від функції  $f(x)$ . Функції ж  $g(k)$  можна дозволити приналежність як до простору  $L_1(-\infty, \infty)$ , так і до простору  $L_2(-\infty, \infty)$ . Більше того, для формулювання властивостей перетворення Фур'є у цьому випадку достатньо лише використання властивостей функції-оригіналу.

По-друге, попри зовнішню симетрію між прямим і оберненим перетвореннями Фур'є, вони є суттєво різними за вимогами до інтегранда. Формула прямого перетворення Фур'є є просто означенням Фур'є-образу. Формула ж для оберненого перетворення Фур'є містить твердження, що інтеграл у правій частині цієї формули дорівнює вихідній функції. Це твердження вимагає певних обмежень на локальну поведінку Фур'є-образу. Тобто не кожний знайдений Фур'є-образ дозволяє за допомогою оберненого перетворення Фур'є відновити вихідну функцію, а лише такий, що задовольняє певним локальним обмежувальним умовам, наприклад, умові Діні. Вона, зокрема, автоматично виконана, якщо функція-оригінал в даній точці неперервна або має в ній скінчену похідну, або хоча б ліву або праву похідні. Також достатньою умовою виконання умови Діні є наявність у відповідній функції скінченної кількості точок розриву першого роду на довільному скінченному проміжку. При складніших особливих точках ця умова може порушуватись, а отже і інтеграл, що фігурує в оберненому перетворенні Фур'є або не існує, або не дорівнює вихідній функції.

Як ми бачимо, умови існування прямого і оберненого перетворень Фур'є набагато різноманітніші від умов існування прямого і оберненого перетворень Лапласа. Це дозволяє використовувати

вати перетворення Фур'є для значно більшої кількості задач математичної фізики, ніж перетворення Лапласа. Характерною рисою прямого і оберненого перетворень Фур'є є гранично висока симетрія відносно одне одного. Симетрія щодо умов існування, щодо форми запису і щодо властивостей.

Умова існування інтегрального перетворення Фур'є носить надзвичайно обмежувальний характер. Легко бачити, що ця умова не виконується для жодної основної елементарної функції, навіть для функції  $f(x)=1$ . Ця обставина різко звужує сферу застосування даного інтегрального перетворення. Проте існує можливість очевидного узагальнення перетворення Фур'є так, що для деяких елементарних функцій Фур'є-образи вже існуватимуть. Мова йде про ті з них, які при наближенні до нескінченно віддаленої точки вздовж дійсної осі функції залишаються обмеженими, хоча і не мають певного значення. Це узагальнення так і називається узагальненим перетворенням Фур'є

$$g(k) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ikx) \exp(-\delta|x|) f(x) dx ,$$

тобто ми шукаємо Фур'є-образ не функції  $f(x)$ , яка в околі нескінченно віддаленої точки може бути скінченою, а функції  $\exp(-\delta|x|)f(x)$ , яка при наближенні до нескінченно віддаленої точки вже прямує до нуля. Отримані таким чином Фур'є-образи вже належатимуть до класу узагальнених функцій. Але і вихідні функції-оригінали слід розглядати як узагальнені функції. Існування узагальненого перетворення Фур'є вже не вимагає абсолютної інтегрованості функції. При цьому узагальнені Фур'є-образи не існуватимуть для функцій, для яких нескінченно віддалена точка є полюсом скінченого порядку, або і навіть суттєво особливою, але такою, що при прямуванні до неї вздовж дійсної осі функція прямує до нескінченності. Для функцій, які при наближенні до нескінченно віддаленої точки прямують до нуля, Фур'є-образи знайдені за допомогою звичайного перетворення Фур'є і узагальненого перетворення Фур'є збігаються. Тому надалі ми часто термінологічно не відрізнятимемо обидва ці перетворення.

#### 1.4. Властивості перетворення Фур'є

Тут ми розглянемо лише, деякі, з нашої точки зору найважливіші, властивості перетворення Фур'є.

**Аналітичні властивості.** Розглянемо пряме перетворення Фур'є, вважаючи, що змінна  $k$  може набувати комплексних значень, а функція  $g(k)$  є аналітичною

$$g(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ikx) f(x) dx .$$

Представимо далі функцію  $f(x)$  у вигляді суми двох функцій, кожна з яких відмінна від нуля лише на одній з півосей

$$f(x) = f_+(x) + f_-(x) .$$

Тут

$$f_+(x) = \begin{cases} f(x), & x < 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases} ,$$

$$f_-(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ f(x), & x > 0 \end{cases} .$$

Тепер розглянемо пряме перетворення Фур'є цієї суми. Очевидно,

$$g(k) = g_+(k) + g_-(k),$$

де

$$g_+(k) = \int_0^{\infty} \exp(-ikx) f_+(x) dx,$$

$$g_-(k) = \int_{-\infty}^0 \exp(-ikx) f_-(x) dx.$$

Перший з останніх двох інтегралів нагадує пряме перетворення Лапласа і, відповідно, існує за тих же умов. Більше того, в області  $\operatorname{Re}(ik) > a_+$  або  $\operatorname{Im}(k) < -a_+$  він збігається до аналітичної функції  $g_+(k)$ . Якщо показник степеню зростання функції  $f_+(x)$   $a_+ < 0$ , то дійсна вісь входить в області аналітичності функції  $g_+(k)$ . Останнє означає, що інтегрування може проводитись не лише вздовж дійсної осі, але і вздовж довільної прямої, паралельній останній і розташованої як нижче, так і вище від неї. В останньому випадку обмеженням є умова  $\operatorname{Im}(k) < -a_+$ . Зауважимо, що від'ємний показник степеню зростання має лише та функція, що спадає, хоча б і як завгодно повільно, при наближенні до нескінченної віддаленої точки вздовж дійсної додатної півосі. Аналогічний аналіз можна провести і щодо другого інтегралу. Останній зручно представити у вигляді

$$g_-(k) = \int_0^{\infty} \exp(ikx) f_-(-x) dx$$

Областю аналітичності функції  $f_-(x)$  буде область  $\operatorname{Re}(-ik) > a_-$  або  $\operatorname{Im}(k) > a_-$ , де  $a_-$  - показник степеню зростання функції  $f_-(x)$ . Якщо  $a_- < 0$ , що відповідає спаданню функції при наближенні до нескінченно віддаленої точки вздовж дійсної від'ємної півосі, то в область аналітичності функції  $g_-(k)$  входить дійсна вісь. У цьому випадку інтегрування може проводитись не лише вздовж дійсної осі, але і вздовж довільної прямої, паралельної дійсній осі і розташовані як вище, так і нижче від неї. В останньому випадку обмеженням є умова  $\operatorname{Im}(k) > a_-$ . Отже, областю аналітичності функції  $g(k)$  є перетин двох областей. Одна з них задається умовою  $\operatorname{Im}(k) < -a_+$ , друга - умовою  $\operatorname{Im}(k) > a_-$ . У висліді функція  $g(k)$  є аналітичною у смугі  $a_- < \operatorname{Im}(k) < -a_+$ .

### Інші властивості.

Для визначеності вважатимемо, що функція  $f(x)$  належить функційному простору  $L_1(-\infty, \infty)$ . Наведемо деякі з них.

1. Найважливішою властивістю інтегрального перетворення Фур'є є його лінійність. Вона означає, що зображення лінійної комбінації функцій є лінійна комбінація відповідних зображень з тими ж самими числовими коефіцієнтами. Ця властивість є наслідком відповідних властивостей інтегралів, а саме: інтеграл суми дорівнює сумі інтегралів, сталий множник можна виносити за знак інтеграла. Ця властивість є універсальною для розглянутих вище функційних просторів.

**Приклад 21.** Знайти зображення  $\sin(t) + 2\cos(t)$ .

**Розв'язання.** Відповідно до вище знайдених зображень тригонометричних функцій

$$\sin(t) + 2\cos(t) := i\pi[\delta(k+1) - \delta(k-1)] + 2\pi[\delta(k+1) + \delta(k-1)].$$

Оскільки ядро прямого інтегрального перетворення Фур'є функція  $\exp(-ikx)$ , так само як і ядро оберненого перетворення Фур'є  $\exp(ikx)$  мають ту властивість, що не змінюються при одночасній заміні  $x \rightarrow \alpha x$  і  $k \rightarrow k/\alpha$ , або  $k \rightarrow \alpha k$  і  $x \rightarrow x/\alpha$ , то

$$f(\alpha x) := \frac{1}{\alpha} g\left(\frac{k}{\alpha}\right),$$

$$g(\alpha t) := \frac{1}{\alpha} f\left(\frac{k}{\alpha}\right).$$

**Приклад 22.** Знайти зображення наступних функцій:  $\sin(Kx)$ ,  $\cos(Kx)$ ,  $\sinh(Kx)$ ,  $\cosh(Kx)$ .

**Розв'язання.** Згідно до наведеної вище властивості,

$$\sin(Kx) := \frac{1}{K} i\pi \left[ \delta\left(\frac{k}{K} + 1\right) - \delta\left(\frac{k}{K} - 1\right) \right].$$

Враховуючи наступну властивість дельта-функції:

$$\delta\left(\frac{k}{K} + 1\right) = \delta\left(\frac{k+K}{K}\right) = K\delta(k+K),$$

отримаємо

$$\sin(Kx) := i\pi[\delta(k+K) - \delta(k-K)].$$

Аналогічно

$$\cos(Kx) := \pi[\delta(k+K) + \delta(k-K)],$$

$$\sinh(Kx) := \pi[\delta(ik+K) - \delta(ik-K)],$$

$$\cosh(Kx) := \pi[\delta(ik+K) + \delta(ik-K)].$$

Видно, що одночасна заміна  $k \rightarrow -k$  і  $i \rightarrow -i$  не змінює інтегралу в оберненому перетворенні Фур'є. Розглянемо це перетворення. Виконаємо тепер комплексне спряження в обох частинах рівності

$$f^*(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ikx) g^*(-k) dk.$$

Якщо оригінал є дійсною функцією, тобто

$$f(x) = f^*(x),$$

то

$$g(k) = g^*(-k).$$

Вірне і зворотне твердження. Для парних функцій  $f(x) = f(-x)$  інтеграл в оберненому перетворенні Фур'є буде відмінним від нуля лише для парної інтегранди. Використавши для експоненти формулу Ейлера, отримаємо

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos(kx) g(k) dk.$$

Для непарної функції  $f(x) = -f(-x)$  аналогічні міркування дають

$$f(x) = i \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \sin(kx) g(k) dk.$$

Для прямого перетворення Фур'є для парних функцій

$$g(k) = \int_0^{\infty} \cos(kx) f(x) dx ,$$

для непарних функцій

$$g(k) = i \int_0^{\infty} \sin(kx) f(x) dx .$$

Наступна властивість перетворення Фур'є є подібною до відповідної властивості перетворення Лапласа:

$$\begin{aligned} f(x+a) &:= \exp(iax) g(k) , \\ g(k+a) &:= \exp(-iak) f(x) . \end{aligned}$$

Відповідно:

$$\begin{aligned} \exp(iax) f(x) &:= g(k-a) , \\ \exp(iak) g(k) &:= f(x+a) . \end{aligned}$$

Безпосереднім узагальненням цих властивостей є наступні:

$$\begin{aligned} f(x) \cos(ax) &:= \frac{1}{2} [g(k+a) + g(k-a)] , \\ f(x) \sin(ax) &:= i \frac{1}{2} [g(k+a) - g(k-a)] , \\ g(k) \cos(ak) &:= \frac{1}{2} [f(x+a) + f(x-a)] , \\ g(k) \sin(ak) &:= -i \frac{1}{2} [f(x+a) - f(x-a)] . \end{aligned}$$

**Приклад 23.** Знайти зображення функції  $\sin(Kx+a)$  .

**Розв'язання.** Згідно до наведеної вище властивості,

$$\sin(Kx+a) := i\pi \exp(iax) [\delta(k+K) - \delta(k-K)] .$$

2. Фур'є-образ абсолютно інтегрованої функції є обмеженою неперервною функцією, що прямує до нуля, коли її аргумент прямує до нескінченно віддаленої точки.

Зауважимо, що така поведінка Фур'є-образу є лише необхідною умовою її абсолютної інтегрованості але не достатньою. Ця властивість також є універсальною.

3. Якщо функція є абсолютно неперервною на кожному скінченному проміжку дійсної осі, а її похідна абсолютно інтегрованою, то

$$\frac{d}{dx} f(x) := ik g(k) .$$

Абсолютна неперервність функції означає, крім її неперервності, ще і її скінчену варіацію на довільному скінченному проміжку дійсної осі. Ця властивість також універсальна. Повторюючи наведені міркування  $n$  разів, ми отримуємо, що

$$\frac{d^n}{dx^n} f(x) := (ik)^n g(k) .$$

Ця властивість інтегрального перетворення Фур'є є однією з головних при практичному застосуванні цього перетворення для розв'язання задач математичної фізики шляхом алгебраїзації задачі, сформульованої для диференціальних рівнянь. Вона переводить операцію диференціювання оригіналу в операцію множення зображення на аргумент.

4. Оскільки, відповідно до другої властивості Фур'є-образ абсолютно інтегрованої функції прямує до нуля, то записавши останню рівність у вигляді

$$g(k) := \frac{d^n f(x)}{dx^n} / (ik)^n$$

або

$$g(k) = F \left\{ \frac{d^n f(x)}{dx^n} \right\} / (ik)^n$$

ми можемо стверджувати, що перейшовши до межі  $|k| \rightarrow \infty$  ми отримаємо відповідне прямування до нуля лівих і правих частин останньої рівності. Швидкість прямування до нуля видно з наступних міркувань. Якби Фур'є-образ похідної у чисельнику, що також залежить від  $k$ , був сталою величиною, то швидкість прямування до нуля Фур'є-образу самої функції була б  $1/|k|^n$ . Оскільки похідна у чисельнику є абсолютно інтегрованою, а отже її Фур'є-образ також прямує до нуля, то ця швидкість вища за  $1/|k|^n$ . Вважатимемо тепер  $n$  максимальним порядком похідної, що існує для даного оригіналу. Ця максимальна відмінна від нуля похідна характеризує ступінь гладкості функції. Отже, існує прямий зв'язок між ступенем гладкості похідної і швидкістю прямування до нуля її Фур'є-образу в околі нескінченно віддаленої точки.

5. Симетрична до 3 властивість має вигляд

$$xf(x) := i \frac{dg(k)}{dk}.$$

Тут функції  $f(x)$  і  $xf(x)$  мають бути абсолютно інтегрованими. Тоді Фур'є-образ буде диференційованим і матиме місце наведена властивість. Повторюючи наведені міркування  $n$  разів, ми отримуємо, що

$$x^n f(x) := i^n \frac{d^n g(k)}{dk^n}.$$

Властивість універсальна.

6. Якщо функція  $f(x)$  разом з усіма своїми похідними є абсолютно інтегрованою, то її Фур'є-образ є аналітичною функцією в комплексній площині  $k = \text{Re}(k) + i \text{Im}(k)$ . Область її аналітичності обговорювалась вище у пункті аналітичні властивості.

**Приклад 24.** Знайти зображення функції  $f(x) = x \cos(Kx)$ .

**Розв'язання.** Відповідно до попередньої властивості,

$$x \cos(Kx) := i\pi \frac{d}{dk} [\delta(k+K) + \delta(k-K)].$$

Зображення похідної є, можливо, найважливішою властивістю інтегрального перетворення Фур'є, оскільки саме ця властивість дозволяє легко розв'язувати звичайні лінійні диференційні рівняння із сталими коефіцієнтами та їх системи, лінійні диференційні рівняння із сталими коефіцієнтами з частинними похідними та їх системи. Отже,

$$\frac{d^n f(x)}{dx^n} := i^n k^n g(k).$$

Для зображення ці властивості будуть такими:

$$k^n g(k) = (-i)^n \frac{d^n f(x)}{dx^n},$$

$$\frac{d^n g(k)}{dk^n} := (-i)^n x^n f(x).$$



7. Наступна властивість має широке застосування для розв'язання інтегральних рівнянь. Мова йде про зображення згортки. Саме вони часто зустрічаються в інтегральних рівняннях. Інтегральне перетворення Фур'є перетворює їх у добуток зображень, одночасно перетворюючи інтегральний член рівняння в алгебраїчний. Отже, для двох абсолютно інтегрованих функцій

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(X) f_2(x-X) dX := g_1(k) g_2(k) ,$$

де

$$f_1(x) := g_1(k) ,$$

$$f_2(x) := g_2(k) .$$

Ця властивість також універсальна.

Щодо зображення інтегралу, то інтегральне перетворення Фур'є застосоване до невизначеного інтегралу матиме вигляд

$$\int f(x) dx := \frac{g(k)}{ik} .$$

Так само виглядатиме і Фур'є-образ інтегралу із змінною верхньою межею

$$\int_c^x f(y) dy := \frac{g(k)}{ik} .$$

Якщо Фур'є-образ  $g(k)$  є аналітичною функцією, то виникає можливість використання при обчисленні оберненого перетворення Фур'є потужного арсеналу методів теорії аналітичних функцій. Найважливішими теоремами, на яких базуються ці методи є теорема Коші для однозв'язаної області, теорема про лишки, лема Жордана.

При обчисленні, наприклад, оберненого перетворення Фур'є нам доводиться обчислювати інтеграл вздовж дійсної осі. Для застосування теореми про лишки, нам потрібно доповнити зазначену пряму до замкненого контуру. При цьому форма замкненого контуру обирається так, щоб інтеграл вздовж зазначеного доповнення або легко обчислювався, або дорівнював нулю. Дуже часто таким зручним доповненням є півколо нескінченно великого радіусу у верхній півплощині, а інтегранда має всередині цього контуру лише ізольовані особливі точки типу полюсів. Тоді до цього інтегралу можна застосувати і теорему про лишки, і лему Жордана. У висліді

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ikx) g(k) dk = i \sum_{n=1}^N \text{res}[\exp(ikx) g(k), k_n] .$$

Лишки тут беруться в усіх особливих точках інтегранди, що лежать у верхній півплощині, крім нескінченно віддаленої точки. Якщо серед особливих точок зображення є точки галуження, то контур інтегрування може бути достатньо складним і обчислення кожного такого інтегралу є окремою задачею. Не викликає принципів ускладнень і випадок, коли особливі точки лежать на дійсній осі.

Розглянемо застосування інтегральних перетворень Фур'є та Лапласа до розв'язання деяких задач математичної фізики для одновимірного рівняння теплопровідності.

**Задача 1. Однорідне одновимірне рівняння теплопровідності.** Розв'яжемо наступне рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} , \quad -\infty < x < \infty, t > 0$$

з початковою умовою

$$u(x,0) = \varphi(x)$$

і межовими умовами, що гарантують існування інтегрального перетворення Фур'є за координатою.

**Розв'язання.** Застосовуємо до функції  $u(x,t)$  за змінною  $x$  перетворення Фур'є

$$u(x,t) := U(k,t) .$$

Відповідно

$$\varphi(x) := \Phi(k) .$$

Тоді за властивістю зображення похідної

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} := -k^2 U(k,t) .$$

Задача тепер матиме вигляд

$$\begin{aligned} \frac{\partial U(k,t)}{\partial t} &= -a^2 k^2 U(k,t) , \\ U(k,0) &= \Phi(k) . \end{aligned}$$

Надалі використаємо інтегральне перетворення Лапласа за часом

$$U(k,t) := U(k,p) .$$

Тоді за властивістю зображення похідної

$$\frac{\partial U(k,t)}{\partial t} := pU(k,p) - \Phi(k) .$$

Рівняння набере вигляду

$$pU(k,p) - \Phi(k) + a^2 k^2 U(k,p) = 0 .$$

Звідси

$$U(k,p) = \frac{\Phi(k)}{p + a^2 k^2} .$$

Оригінал цієї функції буде наступним

$$U(k,t) = \exp(-a^2 k^2 t) \Phi(k) .$$

Виконаємо тепер обернене перетворення Фур'є. Тоді

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-a^2 k^2 t) \exp(ikx) \Phi(k) dk .$$

Фактично, ми отримали подвійний інтеграл, оскільки Фур'є-образ також визначається інтегралом. Користуючись тим, що

$$\Phi(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-iky) \varphi(y) dy$$

отримаємо

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dy \varphi(y) \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-a^2 k^2 t) \exp[ik(x-y)] dk .$$

Оскільки внутрішній інтеграл є Фур'є-образом відомої функції

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-a^2 k^2 t) \exp[ik(x-y)] dk = \frac{\sqrt{\pi}}{a\sqrt{t}} \exp\left[-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}\right] ,$$

то остаточний результат буде таким

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y) \exp\left[-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}\right] dy .$$

**Задача 2. Неоднорідне одновимірне рівняння теплопровідності.** Розв'яжемо наступне одновимірне неоднорідне рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + f(x,t), \quad -\infty < x < \infty, t > 0$$

з початковою умовою

$$u(x,0) = 0$$

і межовими умовами, що гарантують існування перетворення Фур'є за координатою.

**Розв'язання.** Застосуємо до функції  $u(x,t)$  за змінною  $x$  перетворення Фур'є

$$u(x,t) := U(k,t).$$

Відповідно

$$f(x,t) := F(k,t).$$

Тоді за властивістю зображення похідної

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} := -k^2 U(k,t).$$

Задача тепер матиме вигляд

$$\frac{\partial U(k,t)}{\partial t} = -a^2 k^2 U(k,t) + F(k,t),$$

$$U(k,0) = 0.$$

Надалі використаємо перетворення Лапласа за часом. Нехай

$$U(k,t) := U(k,p),$$

$$F(k,t) := F(k,p).$$

Тоді за властивістю зображення похідної

$$\frac{\partial U(k,t)}{\partial t} := pU(k,p).$$

Рівняння набере вигляду

$$pU(k,p) + a^2 k^2 U(k,p) = F(k,p).$$

Звідси

$$U(k,p) = \frac{F(k,p)}{p + a^2 k^2}.$$

Використовуючи властивість зображення згортки оригінал цієї функції можна записати так

$$U(k,t) = \int_0^t \exp[-a^2 k^2 (t-\tau)] F(k,\tau) d\tau.$$

Обернене перетворення Фур'є дає такий результат

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \exp(ikx) \int_0^t \exp[-a^2 k^2 (t-\tau)] F(k,\tau) d\tau$$

Оскільки

$$F(k,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-iky) f(y,t) dy,$$

то шукану функцію можна записати і так

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_0^t dt' f(y,t') \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-a^2 k^2 (t-t')] \exp[ik(x-y)] dk .$$

Використовуючи табличний інтеграл, до речі, обчислений вище

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-a^2 k^2 t) \exp(ikx) dk = \frac{\sqrt{\pi}}{a\sqrt{t}} \exp\left[-\frac{x^2}{4a^2 t}\right]$$

останній інтеграл можна записати так

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_0^t f(y,\tau) \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} \exp\left[-\frac{(x-y)^2}{4a^2(t-\tau)}\right] d\tau .$$

**Задача 3.** Розглянемо задачу Коші для одновимірного однорідного хвильового рівняння

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < \infty, t \geq 0$$

з довільними початковими умовами

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \psi(x)$$

і межовою умовою, що забезпечує існування інтегрального перетворення Фур'є.

**Розв'язання.** Для розв'язання задачі використаємо спочатку інтегральне перетворення Фур'є, взявши в якості межової умови умову його існування,

$$U(k,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ikx) u(x,t) dx ,$$

яку надалі позначатимемо

$$u(x,t) := U(k,t) .$$

Властивість перетворення - Фур'є-образу похідної дозволяє записати

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} := -k^2 U(k,t) .$$

Хвильове рівняння тепер матиме вигляд

$$\frac{\partial^2 U(k,t)}{\partial t^2} + a^2 k^2 U(k,t) = 0$$

з наступними початковими умовами

$$U(k,0) = \Phi(k), \quad U_t(k,0) = \Psi(k) ,$$

де

$$\Phi(k) := \varphi(x), \quad \Psi(k) := \psi(x) .$$

Подальше розв'язання рівняння можна виконати за допомогою інтегрального перетворення Лапласа. У цьому разі

$$U(k,t) =: U(k,p) .$$

За властивістю зображення похідної

$$\frac{\partial^2 U(k,t)}{\partial t^2} =: p^2 U(k,p) - p\Phi(k) - \Psi(k) .$$

Тепер рівняння набере вигляду

$$p^2 U(k,p) - p\Phi(k) - \Psi(k) + a^2 k^2 U(k,p) = 0 .$$

Звідси

$$U(k, p) = \frac{p}{p^2 + a^2 k^2} \Phi(k) + \frac{1}{ak} \frac{ak}{p^2 + a^2 k^2} \Psi(k) .$$

Використовуючи табличні зображення синуса і косинуса, отримаємо

$$U(k, t) = \cos(akt) \Phi(k) + \frac{\sin(ak)}{ak} \Psi(k) .$$

Виконаємо тепер обернене перетворення Фур'є. Тоді

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ikx) U(k, t) dk$$

або

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ikx) \cos(akt) \Phi(k) dk + \\ + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ikx) \frac{\sin(ak)}{ak} \Psi(k) dk .$$

Використовуючи формули Ейлера, останній вираз можна записати так

$$u(x, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[ik(x+at)] \Phi(k) dk + \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[ik(x-at)] \Phi(k) dk + \\ + \frac{1}{4\pi ai} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[ik(x+at)] \frac{\Psi(k)}{k} dk - \frac{1}{4\pi ai} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[ik(x-at)] \frac{\Psi(k)}{k} dk .$$

Останні два інтеграли у правій частині можна представити так:

$$\frac{1}{4\pi ai} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[ik(x+at)] \frac{\Psi(k)}{k} dk - \frac{1}{4\pi ai} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[ik(x-at)] \frac{\Psi(k)}{k} dk = \\ = \frac{1}{4\pi a} \int_{x-at}^{x+at} dy \int_{-\infty}^{\infty} \exp(iky) \Psi(k) dk .$$

Оскільки права частина виразу фактично є сумою відповідних Фур'є-образів, то остаточний результат буде таким

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [\varphi(x+at) + \varphi(x-at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(y) dy .$$

Фактично ми отримали формулу Даламбера.

**Задача 4.** Розглянемо задачу Коші для одновимірного неоднорідного хвильового рівняння. Нехай система знаходиться під дією зовнішнього збурення, а початкове збурення відсутнє:

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + f(x, t) , \quad -\infty < x < \infty , \quad t > 0 ,$$

$$u(x, 0) = 0 , \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0 .$$

**Розв'язання.** Відсутність границь у середовища робить доцільним використання інтегрального перетворення Фур'є за координатою. Наявність початкових умов дозволяє використати і інтегральне перетворення Лапласа за часом. Застосуємо спочатку перетворення Лапласа за часом

$$u(x, t) =: U(x, p) , \\ \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} =: p^2 U(x, p) ,$$

$$f(x, t) := F(x, p) .$$

Рівняння набере вигляду

$$p^2 U(x, p) = a^2 \frac{\partial^2 U(x, p)}{\partial x^2} + F(x, p) .$$

Використаємо тепер перетворення Фур'є за координатою

$$U(x, p) := U(k, p) ,$$

$$\frac{\partial^2 U(x, p)}{\partial x^2} := -k^2 U(k, p) ,$$

$$F(x, p) := F(k, p) .$$

Остаточний вигляд рівняння буде таким

$$p^2 U(k, p) = -a^2 k^2 U(k, p) + F(k, p) .$$

Його розв'язок

$$U(k, p) = \frac{F(k, p)}{p^2 + a^2 k^2} .$$

Оскільки

$$\sin(akt) := \frac{ak}{p^2 + a^2 k^2} ,$$

і існує властивість перетворення Лапласа зображення згортки

$$F_1(p)F_2(p) := \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau ,$$

то оригінал за Лапласом буде таким

$$u(k, t) = \int_0^t f(k, \tau) \frac{\sin[ak(t - \tau)]}{ak} d\tau .$$

Виконаємо тепер обернене перетворення Фур'є

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \exp(ikx) \int_0^t F(k, \tau) \frac{\sin[ak(t - \tau)]}{ak} d\tau .$$

Оскільки

$$F(k, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, \tau) \exp(-ikx) dx ,$$

то

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \exp(ikx) \int_0^t d\tau \frac{\sin[ak(t - \tau)]}{ak} \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} f(y, \tau) \exp(-iky) dy .$$

Подальше спрощення можливе при використанні такого співвідношення

$$\frac{\sin[ak(t - \tau)]}{ak} = \int_0^t \cos[ak(t' - \tau)] dt' .$$

Тепер

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \exp(ikx) \int_0^t d\tau \int_0^t dt' \cos[ak(t' - \tau)] \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} f(y, \tau) \exp(-iky) dy .$$

Інтеграл за  $k$  можна обчислити

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos[ak(t' - \tau)] \exp(ikx) \exp(-iky) dk = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \exp\{ik[x - y + a(t' - \tau)]\} + \exp\{ik[x - y - a(t' - \tau)]\} \right\} dk . \end{aligned}$$

Тут ми скористались наступною формулою Ейлера

$$\cos[ak(t' - \tau)] = \frac{1}{2} \left\{ \exp[iak(t' - \tau)] + \exp[-iak(t' - \tau)] \right\} .$$

Якщо використати одне з інтегральних представлень дельта-функції

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ikx) dk ,$$

то

$$I = \delta[x - y + a(t' - \tau)] + \delta[x - y - a(t' - \tau)] .$$

Тепер

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \int_0^t dt' \int_{-\infty}^{\infty} f(y, \tau) \left\{ \delta[x - y + a(t' - \tau)] + \delta[x - y - a(t' - \tau)] \right\} dy .$$

Наявність дельта-функцій дозволяє обчислити інтеграл і за  $y$ . У висліді

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \int_0^t \left\{ f[x + a(t' - \tau), \tau] + f[x - a(t' - \tau), \tau] \right\} dt' .$$

Складність аргументів інтегранди можна перенести на складність меж інтегрування отже,

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \int_0^t \left\{ \int_{x-a\tau}^{x+a(t-\tau)} f(y, \tau) dy - \int_{x+a\tau}^{x-a(t-\tau)} f(y, \tau) dy \right\} d\tau .$$

Отриманий результат можна записати і так

$$u(x, t) = \frac{1}{2a} \int_0^t \left\{ \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(y, \tau) dy - \int_{x-a\tau}^{x+a\tau} f(y, \tau) dy \right\} d\tau .$$

Цей результат описує коливальний процес, цілком зумовлений зовнішнім збуренням.

Досі всі наведені властивості носили універсальний характер. Наведемо тепер властивість, що має місце для функцій з інтегрованим квадратом і не вірна для абсолютно інтегрованих функцій.

**Означення.** Фур'є-образ функції з інтегрованим квадратом також є функцією з інтегрованим квадратом, причому між ними існує наступний зв'язок

$$2\pi \int_{-\infty}^{\infty} f(x) f^*(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(k) g^*(k) dk .$$

**Доведення.** Оскільки

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(k) \exp(-ikx) dk ,$$

то

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)f^*(x)dx &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dk g(k) \exp(-ikx) \int_{-\infty}^{\infty} dk' g^*(k') \exp(ik'x) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk g(k) \int_{-\infty}^{\infty} dk' g^*(k') \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[i(k'-k)x] dx . \end{aligned}$$

Враховуючи означення дельта-функції Дірака

$$\delta(k-k') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[i(k'-k)x] dx$$

і її властивості, якраз і отримуємо бажану рівність.

### 1.5. Синус-перетворення Фур'є

У разі, якщо областю визначення функції є не вся дійсна вісь, а лише додатна піввісь, замість експоненційного перетворення Фур'є використовуються синус- і косинус-перетворення Фур'є. Перше з цих інтегральних перетворень має один з наступних виглядів:

$$\begin{aligned} g(k) &= \int_0^{\infty} f(x) \sin(kx) dx , \\ f(x) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} g(k) \sin(kx) dk , \\ g(k) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \sin(kx) dx , \\ f(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} g(k) \sin(kx) dk , \\ g(k) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(x) \sin(kx) dx , \\ f(x) &= \int_0^{\infty} g(k) \sin(kx) dk , \end{aligned}$$

де  $f(x)$  – оригінал, а  $g(k)$  – зображення за Фур'є. Надалі ми надаватимемо перевагу першому варіанту запису, який скорочено позначатимемо  $g(k) := f(x)$  або  $f(x) := g(k)$ .

Умови існування синус-перетворення Фур'є такі самі як і для експоненційного перетворення Фур'є. Всі властивості синус-перетворення перевіряються аналогічно експоненційному перетворенню Фур'є. Тобто мова йде про абсолютну інтегрованість відповідних функцій на півосі, що еквівалентне приналежності цих функцій до простору  $L_1[0, \infty)$ . З тих самих міркувань, що і для експоненційного перетворення Фур'є, розглядають і узагальнене синус-перетворення Фур'є

$$g(k) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \exp(-\delta x) f(x) \sin(kx) dx .$$

З багатьох властивостей синус-перетворення Фур'є розглянемо лише одну з них, важливу для розв'язання диференціальних рівнянь.

**Зображення похідної.** Нехай



$$f(x) := g(k).$$

Знайдемо зображення  $df(x)/dx$ . За означенням

$$\int_0^{\infty} \frac{df(x)}{dx} \sin(kx) dx = f(x) \sin(kx) \Big|_0^{\infty} - k \int_0^{\infty} f(x) \cos(kx) dx = -k \int_0^{\infty} f(x) \cos(kx) dx,$$

оскільки з умов існування синус-перетворення Фур'є  $f(\infty) = 0$ . З отриманого результату видно, що зображення першої похідної не можна виразити через зображення самої функції. Цей же висновок стосується довільної похідної непарного порядку. Розглянемо тепер зображення похідної другого порядку

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \sin(kx) dx &= -k \int_0^{\infty} \frac{df(x)}{dx} \cos(kx) dx = \\ &= -kf(x) \cos(kx) \Big|_0^{\infty} - k^2 \int_0^{\infty} f(x) \sin(kx) dx. \end{aligned}$$

Символічно останній результат можна записати так

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} := -k^2 g(k) + kf(0).$$

Подібно запишеться і похідна довільного але парного порядку

$$\frac{d^{2n} f(x)}{dx^{2n}} := (-k^2)^n g(k) + (-k^2)^{n-1} k \frac{d^{2n-2} f(0)}{dx^{2n-2}} + \dots + kf(0).$$

Синус-перетворення Фур'є зручно застосовувати до диференціальних рівнянь другого порядку для півбезмежного середовища з межевою умовою першого роду на межі.

**Подібність перетворення.** Оскільки

$$\int_0^{\infty} f(ax) \sin(kx) dx = \frac{1}{a} \int_0^{\infty} f(y) \sin(ky/a) dy,$$

то

$$f(ax) := \frac{1}{a} F(k/a).$$

Аналогічно

$$F(ak) := f(x/a)/a.$$

**Зміщення аргументу.** Оскільки

$$\int_0^{\infty} f(x) \cos(bx) \sin(kx) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} f(x) \{ \sin[(b+k)x] - \sin[(b-k)x] \} dx,$$

то

$$f(x) \cos(bx) := \frac{1}{2} [F(k+b) + F(k-b)].$$

**Зображення одиниці.** Оскільки

$$\int_0^{\infty} \sin(kx) dx = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \exp(-\delta x) \sin(kx) dx = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{k}{k^2 + \delta^2} = \frac{1}{k},$$

то

$$1 := 1/k .$$

Застосуємо інтегральне синус-перетворення Фур'є разом з інтегральним перетворенням Лапласа до розв'язання рівняння у частинних похідних.

**Задача 5. Однорідне одновимірне рівняння теплопровідності.** Розв'яжемо наступне рівняння теплопровідності для півбезмежної прямої

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} , \quad 0 < x < \infty, t > 0$$

з початковою умовою

$$u(x,0) = 0$$

і межовими умовами, що забезпечують існування синус-перетворення Фур'є за координатою

$$u(0,t) = f(t) .$$

**Розв'язання.** Застосуємо до функції  $u(x,t)$  синус-перетворення Фур'є за координатою

$$U(k,t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} u(x,t) \sin(kx) dx ,$$

або

$$u(x,t) := U(k,t) .$$

Тоді за властивістю зображення похідної

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} := kf(t) - k^2 U(k,t) .$$

Тепер задача матиме вигляд

$$\frac{\partial U(k,t)}{\partial t} + a^2 k^2 U(k,t) = a^2 kf(t) ,$$
$$U(0,t) = 0 .$$

Далі використаємо інтегральне перетворення Лапласа. Нехай

$$U(k,t) := U(k,p) ,$$
$$f(t) := F(p) ,$$

тоді за властивістю зображення похідної

$$\frac{\partial U(k,t)}{\partial t} := pU(k,p)$$

і рівняння матиме вигляд

$$pU(k,p) + a^2 k^2 U(k,p) = a^2 kF(p) .$$

Звідси

$$U(k,p) = \frac{a^2 kF(p)}{p + a^2 k^2} .$$

Використовуючи властивість зображення згортки матимемо

$$U(k,t) = a^2 k \int_0^t \exp[-a^2 k^2 (t-\tau)] f(\tau) d\tau .$$

Застосуємо тепер обернене перетворення Фур'є

$$u(x,t) = \frac{2a^2}{\pi} \int_0^{\infty} d\tau f(\tau) \int_0^{\infty} \sin(kx) \exp[-a^2 k^2 (t-\tau)] k dk .$$

Використовуючи формулу Ейлера для синуса і відомий інтеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-a^2 k^2 t) \exp(ikx) dk = \frac{\sqrt{\pi}}{a\sqrt{t}} \exp\left[-\frac{x^2}{4a^2 t}\right],$$

попередньо здиференціювавши його за координатою,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-a^2 k^2 t) \exp(ikx) k dk = i \frac{\sqrt{\pi} x}{2a^3 t \sqrt{t}} \exp\left[-\frac{x^2}{4a^2 t}\right],$$

отримаємо

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} \sin(kx) \exp(-a^2 k^2 t) k dk = \\ & = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-a^2 k^2 t) \exp(ikx) k dk = \frac{\sqrt{\pi} x}{4a^3 t \sqrt{t}} \exp\left[-\frac{x^2}{4a^2 t}\right]. \end{aligned}$$

Тепер обчислимо внутрішній інтеграл виразу для шуканої функції і остаточно матимемо

$$u(x, t) = \frac{x}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \exp\left[-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}\right] \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}} d\tau.$$

Легко переконатись, що у разі, якщо  $f(t) = u_0$ ,

$$u(x, t) = u_0 \left\{ 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x/2a\sqrt{t}} \exp(-y^2) dy \right\}.$$

Однак, останній випадок з математичної точки зору становить окремий інтерес, оскільки вимагає обчислення деяких важливих інтегралів, відмінних від попередніх. Наведемо цей випадок, взявши за основу відповідний розв'язок рівняння теплопровідності після застосування інтегральних перетворень Фур'є і Лапласа. У цьому разі

$$U(k, p) = \frac{a^2 u_0 k}{p(p + a^2 k^2)}$$

Використовуючи такі властивості перетворення Лапласа як зображення інтегралу та теорему зміщення при виконанні оберненого перетворення Лапласа матимемо

$$U(k, t) = a^2 u_0 k \int_0^t \exp(-a^2 k^2 \tau) d\tau,$$

або після обчислення інтегралу

$$U(k, t) = \frac{u_0}{k} [1 - \exp(-a^2 k^2 t)].$$

Виконаємо тепер обернене перетворення Фур'є. За означенням

$$u(x, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} U(k, t) \sin(kx) dk,$$

або

$$u(x, t) = \frac{2u_0}{\pi} \int_0^{\infty} [1 - \exp(-a^2 k^2 t)] \frac{\sin(kx)}{k} dk.$$

Враховуючи, що

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin kx}{k} dk = \frac{\pi}{2},$$

отримаємо

$$u(x, t) = u_0 \left\{ 1 - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \exp(-a^2 k^2 t) \frac{\sin(kx)}{k} dk \right\}.$$

Для подальших обчислень використаємо наступний результат

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} \exp(-a^2 k^2 t) \cos(kx) dk = \\ & = \frac{1}{2} \left\{ \int_0^{\infty} \exp(-a^2 k^2 t) \cos(kx) dk + i \int_0^{\infty} \exp(-a^2 k^2 t) \sin(kx) dk \right\} = \\ & = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \exp(-a^2 k^2 t + ikx) dk. \end{aligned}$$

Надалі виконаємо перетворення

$$-a^2 k^2 t + ikx = - \left( ka\sqrt{t} - i \frac{x}{2a\sqrt{t}} \right)^2 - \frac{x^2}{4a^2 t}$$

і зробимо заміну

$$ka\sqrt{t} - i \frac{x}{2a\sqrt{t}} = \tau, \quad dk = \frac{1}{a\sqrt{t}} d\tau.$$

У висліді отримаємо

$$\int_0^{\infty} \exp(-a^2 k^2 t) \cos(kx) dk = \frac{1}{2a\sqrt{t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4a^2 t}\right) \int_0^{\infty} \exp(-y^2) dy$$

або

$$\int_0^{\infty} \exp(-a^2 k^2 t) \cos(kx) dk = \frac{\sqrt{\pi}}{2a\sqrt{t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4a^2 t}\right),$$

оскільки

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-y^2) dy = \sqrt{\pi}.$$

З іншого боку

$$\int_0^{\infty} \exp(-a^2 k^2 t) \frac{\sin(kx)}{k} dk = \int_0^x dy \int_0^{\infty} \exp(-a^2 k^2 t) \cos(ky) dk.$$

Таким чином,

$$\int_0^{\infty} \exp(-a^2 k^2 t) \frac{\sin(kx)}{k} dk = \frac{\sqrt{\pi}}{2a\sqrt{t}} \int_0^x \exp\left(-\frac{y^2}{4a^2 t}\right) dy.$$

Останній інтеграл вже не береться, але може бути приведений до стандартного такою підстановкою

$$\frac{y}{2a\sqrt{t}} = \tau, \quad dy = 2a\sqrt{t} d\tau.$$

Тоді

$$\int_0^{\infty} \exp(-a^2 k^2 t) \frac{\sin(kx)}{k} dk = \sqrt{\pi} \int_0^{x/2a\sqrt{t}} \exp(-y^2) dy.$$

Остаточний результат тепер буде таким

$$u(x,t) = u_0 \left\{ 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x/2a\sqrt{t}} \exp(-y^2) dy \right\} .$$

### 1.6. Косинус-перетворення Фур'є

Це інтегральне перетворення має один з наступних виглядів:

$$g(k) = \int_0^{\infty} f(x) \cos(kx) dx ,$$

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} g(k) \cos(kx) dk ,$$

$$g(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \cos(kx) dx ,$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} g(k) \cos(kx) dk ,$$

$$g(k) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(x) \cos(kx) dx ,$$

$$f(x) = \int_0^{\infty} g(k) \cos(kx) dk ,$$

де  $f(x)$  – оригінал, а  $g(k)$  – Фур'є-образ. Узагальнене косинус-перетворення Фур'є має вигляд

$$g(k) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \exp(-\delta x) f(x) \cos(kx) dx .$$

Надалі ми надаватимемо перевагу першому варіанту запису, який символічно зобразимо як

$$g(k) := f(x)$$

або

$$f(x) := g(k) .$$

Умови існування косинус-перетворення Фур'є такі самі як і для експоненційного перетворення Фур'є. Для прикладу розглянемо лише одну властивість косинус-перетворення Фур'є, важливу для розв'язання диференціальних рівнянь.

**Зображення похідної.** Нехай

$$f(x) := g(k) .$$

Знайдемо зображення  $df(x)/dx$ . За означенням

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{df(x)}{dx} \cos(kx) dx &= f(x) \cos(kx) \Big|_0^{\infty} + \\ &+ k \int_0^{\infty} f(x) \sin(kx) dx = k \int_0^{\infty} f(x) \sin(kx) dx - f(0) , \end{aligned}$$

оскільки з умови існування косинус-перетворення Фур'є  $f(\infty) = 0$ . З отриманого результату видно, що зображення першої похідної не можна виразити через зображення самої функції. Цей же

висновок стосується довільної похідної непарного порядку. Розглянемо тепер зображення похідної другого порядку

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \cos(kx) dx &= k \int_0^{\infty} \frac{df(x)}{dx} \sin(kx) dx - \frac{df(0)}{dx} = \\ &= kf(x) \sin(kx) \Big|_0^{\infty} - k^2 \int_0^{\infty} f(x) \cos(kx) dx - \frac{df(0)}{dx}. \end{aligned}$$

Символічно останній результат можна записати так

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} := -k^2 g(k) - \frac{df(0)}{dx}.$$

Подібно запишеться і похідна довільного але парного порядку

$$\frac{d^{2n} f(x)}{dx^{2n}} := (-k^2)^n g(k) - (-k^2)^{n-1} \frac{d^{2n-1} f(0)}{dx^{2n-1}} - \dots - \frac{df(0)}{dx}.$$

Косинус-перетворення Фур'є зручно застосовувати до диференціальних рівнянь другого порядку для півбезмежного середовища з межевою умовою першого роду на межі.

**Подібність перетворення.** Оскільки

$$\int_0^{\infty} f(ax) \cos(kx) dx = \frac{1}{a} \int_0^{\infty} f(y) \cos(ky/a) dy,$$

то

$$f(ax) := F(k/a)/a.$$

Аналогічно

$$F(ak) := f(x/a)/a.$$

**Зміщення аргументу.** Оскільки

$$\int_0^{\infty} f(x) \cos(bx) \cos(kx) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} f(x) \{ \cos[(b+k)x] + \cos[(b-k)x] \} dx,$$

то

$$f(x) \cos(bx) := \frac{1}{2} [F(k+b) + F(k-b)].$$

**Зображення одиниці.** Оскільки

$$\int_0^{\infty} \cos(kx) dx = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \exp(-\delta x) \cos(kx) dx = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\delta}{k^2 + \delta^2} = \pi \delta(k).$$

то

$$1 := \pi \delta(k).$$

Розглянемо декілька прикладів застосування інтегрального косинус-перетворення Фур'є.

**Задача 6. Однорідне та одновимірне рівняння теплопровідності.** Розв'яжемо наступне рівняння теплопровідності

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} &= a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \\ 0 &< x < \infty, \quad t > 0 \end{aligned}$$

з початковою умовою

$$u(x,0) = 0$$

і межевою умовами

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \varphi(t) .$$

**Розв'язання.** Застосовуємо до функції  $u(x,t)$  за змінною  $x$  косинус-перетворення Фур'є

$$U(k,t) = \int_0^{\infty} u(x,t) \cos(kx) dx .$$

Надалі ми його символічно позначуватимемо

$$u(x,t) := U(k,t) .$$

Відповідно до властивості зображення похідної

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} := -\varphi(t) - k^2 U(k,t) .$$

Рівняння і початкова умова тепер наберуть вигляду

$$\frac{\partial U(k,t)}{\partial t} + a^2 k^2 U(k,t) = -a^2 \varphi(t) ,$$

$$U(k,0) = 0 .$$

Для подальшого розв'язання задачі використаємо інтегральне перетворення Лапласа. Нехай

$$U(k,t) =: U(k,p) ,$$

$$\varphi(t) =: \Phi(p) ,$$

тоді за властивістю зображення похідної

$$\frac{\partial U(k,t)}{\partial t} =: pU(k,p)$$

і диференціальне рівняння перетвориться в алгебраїчне

$$pU(k,t) + a^2 k^2 U(k,t) = -a^2 \Phi(p) .$$

Звідси

$$U(k,t) = -\frac{a^2 \Phi(p)}{p + a^2 k^2} .$$

Використовуючи властивість зображення згортки

$$U(k,t) = -a^2 \int_0^t \exp(-a^2 k^2 \tau) \varphi(t - \tau) d\tau .$$

Виконаємо тепер обернене косинус перетворення Фур'є. У висліді

$$u(x,t) = -\frac{2a^2}{\pi} \int_0^t d\tau \varphi(t - \tau) \int_0^{\infty} \exp(-a^2 k^2 \tau) \cos(kx) dk$$

Для обчислення внутрішнього інтегралу використаємо наступний табличний інтеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-a^2 k^2 t) \exp(ikx) dk = \frac{\sqrt{\pi}}{a\sqrt{t}} \exp\left[-\frac{x^2}{4a^2 t}\right] .$$

Очевидно

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \exp(-a^2 k^2 \tau) \cos(kx) dk &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-a^2 k^2 \tau) \exp(ikx) dk = \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2a\sqrt{\tau}} \exp\left[-\frac{x^2}{4a^2 \tau}\right] . \end{aligned}$$

Остаточний результат буде таким

$$u(x,t) = -\frac{a}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \varphi(t-\tau) \frac{1}{\sqrt{\tau}} \exp\left[-\frac{x^2}{4a^2\tau}\right] d\tau .$$

### 1.7. Скінчене інтегральне перетворення Фур'є

Розглянуті нами варіанти інтегральних перетворень Фур'є застосовні лише у разі, якщо аргумент функції змінюється у нескінченних межах. Ця обставина дозволяє успішно розв'язувати велику кількість задач математичної фізики для безмежних областей. Якщо ж область, де шукається розв'язок задачі, є обмеженою, то не менш успішно можна застосувати скінчені інтегральні перетворення Фур'є. Фактично, у цьому разі ми представляємо функцію не інтегралом Фур'є, а рядом Фур'є. Отже скінчене обернене перетворення Фур'є має вигляд

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n e_n(x) .$$

Пряме перетворення Фур'є визначає коефіцієнти цього ряду і має вигляд

$$f_n = \frac{1}{\|e_n\|^2} \int_a^b \rho(x) f(x) e_n(x) dx .$$

Тут  $e_n(x)$  - ядро інтегрального перетворення. Звичайно це набір ортогональних функцій, тобто таких, що задовольняють умові

$$\int_a^b \rho(x) e_n(x) e_m(x) dx = 0, \quad n \neq m ,$$

$\rho(x)$  - вагова функція,  $x \in [a, b]$ ,

$$\|e_n\|^2 = \int_a^b \rho(x) e_n^2(x) dx$$

- квадрат норми ядра інтегрального перетворення.

Мета застосування скінченого інтегрального перетворення Фур'є при розв'язанні задач математичної фізики така як і інтегрального перетворення Фур'є - спрощення диференційного рівняння у частинних похідних за рахунок вилучення з нього похідної за даною змінною, або перетворення диференційного рівняння в алгебраїчне, якщо мова йде про звичайне диференційне рівняння. Певною проблемою при застосуванні скінчених інтегральних перетворень Фур'є є вибір ядра перетворення, оскільки воно залежить як від виду рівняння, так і від типу межових умов. Фактично, застосування методу скінчених перетворень еквівалентне використанню методу поділу змінних у разі однорідних диференційних рівнянь з однорідними межовими умовами і не має переваг перед останнім. Для неоднорідних рівнянь і межових умов метод поділу змінних безпосередньо не застосовний і тут переваги методи скінчених перетворень суттєві.

**Межові умови третього роду.** Розглянемо застосування методу скінчених інтегральних перетворень до розв'язання наступної межової задачі для одновимірного рівняння теплопровідності з межовими умовами третього роду

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} &= a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + f(x,t), \quad x \in (a,b), \\ u(x,0) &= \varphi(x) , \\ \alpha_1 \frac{\partial u(a,t)}{\partial x} - \beta_1 u(a,t) &= \mu_1(t) , \end{aligned}$$



$$\alpha_2 \frac{\partial u(b,t)}{\partial x} + \beta_2 u(b,t) = \mu_2(t) .$$

У цій задачі неоднорідними є рівняння, початкова і межові умови. Функції  $f(x,t)$ ,  $\varphi(x)$ ,  $\mu_1(t)$ ,  $\mu_2(t)$  вважаються відомими, так само як і коефіцієнти  $a^2$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$ .

Позначимо шукане ядро скінченного інтегрального перетворення через  $R(k,x)$  і підберемо його так, щоб вилучити з диференційного рівняння похідну за координатою. При такому виборі ядра пряме скінчене інтегральне перетворення Фур'є матиме вигляд

$$U(k,t) = \int_a^b R(k,x)u(x,t)dx ,$$

або у символічних позначеннях

$$u(x,t) =: U(k,t) .$$

Відповідно,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} &=: \frac{\partial U(k,t)}{\partial t} , \\ f(x,t) &=: F(k,t) , \\ \varphi(x) &=: \Phi(k) . \end{aligned}$$

Зображення другої похідної невідомої функції за координатою вимагає вже окремого дослідження. Проведемо його. Отже,

$$\begin{aligned} \int_{-a}^b R(k,x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} dx &= R(k,x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \Big|_a^b - \int_{-a}^b \frac{\partial R(k,x)}{\partial x} \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} dx = \\ &= R(k,x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \Big|_a^b - \frac{\partial R(k,x)}{\partial x} u(x,t) \Big|_a^b + \int_{-a}^b \frac{\partial^2 R(k,x)}{\partial x^2} u(x,t) dx . \end{aligned}$$

Застосування скінченного інтегрального перетворення Фур'є буде успішним лише при виконанні двох умов: по-перше, зінтегрована частина інтегралу повинна залежати лише від відомих функцій і ні в якому разі не від функцій  $u(a,t)$ ,  $u(b,t)$ ,  $\frac{\partial u(a,t)}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial u(b,t)}{\partial x}$ ; по-друге, незінтегрована частина має безпосередньо визначатись через Фур'є-образ шуканої функції. Можна показати, що перша умова виконуватиметься у разі, якщо ядро інтегрального перетворення задовольнятиме однорідним межовим умовам задачі. Дійсно, при використанні межових умов для невідомої функції, то

$$\begin{aligned} &R(k,x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \Big|_a^b - \frac{\partial R(k,x)}{\partial x} u(x,t) \Big|_a^b = \\ &= R(k,b) \frac{\partial u(b,t)}{\partial x} - R(k,a) \frac{\partial u(a,t)}{\partial x} - \frac{\partial R(k,b)}{\partial x} u(b,t) + \frac{\partial R(k,a)}{\partial x} u(a,t) = \\ &= -\frac{u(b,t)}{\alpha_2} \left[ \alpha_2 \frac{\partial R(k,b)}{\partial x} + \beta_2 R(k,b) \right] - \frac{u(a,t)}{\alpha_1} \left[ \alpha_1 \frac{\partial R(k,a)}{\partial x} - \beta_1 R(k,a) \right] + \\ &\quad + \frac{\mu_1(t)}{\alpha_1} + \frac{\mu_2(t)}{\alpha_2} . \end{aligned}$$

Якщо ядро інтегрального перетворення задовольняє межовим умовам задачі, тобто

$$\alpha_1 \frac{\partial R(k,a)}{\partial x} - \beta_1 R(k,a) = 0 ,$$

$$\alpha_2 \frac{\partial R(k, b)}{\partial x} + \beta_2 R(k, b) = 0 ,$$

то зінтегрована частина інтегралу матиме вигляд

$$R(k, x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Big|_a^b - \frac{\partial R(k, x)}{\partial x} u(x, t) \Big|_a^b = \frac{\mu_1(t)}{\alpha_1} + \frac{\mu_2(t)}{\alpha_2} .$$

Незінтегрована частина інтегралу виражатиметься через Фур'є-образ невідомої функції лише у разі, якщо

$$\frac{\partial^2 R(k, x)}{\partial x^2} = -k^2 R(k, x) ,$$

тобто задовольнятиме звичайному лінійному однорідному диференційному рівнянню другого порядку із сталими коефіцієнтами. Разом з межовими умовами воно утворює межову задачу.

Після застосування цього інтегрального перетворення до вихідного рівняння воно набере вигляду

$$\frac{\partial U(k, t)}{\partial t} = -a^2 k^2 U(k, t) + F(k, t) + a^2 \left[ \frac{\mu_1(t)}{\alpha_1} + \frac{\mu_2(t)}{\alpha_2} \right] .$$

Скінчене інтегральне перетворення слід застосувати також і до початкової умови. Остання матиме вигляд

$$U(k, 0) = \Phi(k) .$$

Таким чином, вихідна межова задача для диференційного рівняння з частинними похідними привелась до задачі Коші для звичайного диференційного рівняння. Далі цю задачу можна розв'язати, наприклад, за допомогою інтегрального перетворення Лапласа. Нехай

$$U(k, t) := U(k, p) ,$$

$$F(k, t) := F(k, p) ,$$

$$\mu_1(t) := \mu_1(p) ,$$

$$\mu_2(t) := \mu_2(p) ,$$

тоді за властивістю зображення похідної

$$\frac{\partial U(k, t)}{\partial t} = pU(k, p) - \Phi(k)$$

і задача Коші приведеться до наступного лінійного алгебраїчного рівняння

$$pU(k, p) - \Phi(k) = -a^2 k^2 U(k, p) + F(k, p) + a^2 \left[ \frac{\mu_1(p)}{\alpha_1} + \frac{\mu_2(p)}{\alpha_2} \right] .$$

Це рівняння матиме наступний розв'язок

$$U(k, p) = \frac{\Phi(k)}{p + a^2 k^2} + \frac{F(k, p)}{p + a^2 k^2} + \frac{a^2}{p + a^2 k^2} \left[ \frac{\mu_1(p)}{\alpha_1} + \frac{\mu_2(p)}{\alpha_2} \right] .$$

Як ми бачимо, зображення за Лапласом невідомої функції є сумою трьох доданків, кожний з яких зумовлений внеском однієї з причин, що викликає процес теплопровідності у тілі: початковий розподіл температури (початкова умова), внутрішні джерела і стоки тепла (вільний член рівняння), неоднорідність межових умов. Такою ж буде і структура оригіналу. Після виконання оберненого перетворення Лапласа

$$U(k, t) = \Phi(k) \exp(-a^2 k^2 t) + \int_0^t \exp(-a^2 k^2 \tau) F(k, t - \tau) d\tau +$$

$$+a^2 \int_0^t \exp(-a^2 k^2 \tau) \left[ \frac{\mu_1(t-\tau)}{\alpha_1} + \frac{\mu_2(t-\tau)}{\alpha_2} \right] d\tau .$$

Виконуючи тепер обернене скінчене перетворення Фур'є отримаємо остаточний результат

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_k \Phi(k) \exp(-a^2 k^2 t) R(k,x) + \\ &+ \sum_k \int_0^t \exp(-a^2 k^2 \tau) F(k,t-\tau) d\tau R(k,x) + \\ &+ a^2 \sum_k \int_0^t \exp(-a^2 k^2 \tau) \left[ \frac{\mu_1(t-\tau)}{\alpha_1} + \frac{\mu_2(t-\tau)}{\alpha_2} \right] d\tau R(k,x) . \end{aligned}$$

Значення параметра  $k$ , за яким відбувається сумування, так само як і ядро скінченного інтегрального перетворення, може бути знайденим лише у висліді розв'язання наступної межової задачі, яка, до речі, належить до класу задач Штурма-Ліувілля з усіма наслідками цього щодо властивостей розв'язків:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 R(k,x)}{\partial x^2} + k^2 R(k,x) &= 0 , \\ \alpha_1 \frac{\partial R(k,a)}{\partial x} - \beta_1 R(k,a) &= 0 , \quad \alpha_2 \frac{\partial R(k,b)}{\partial x} + \beta_2 R(k,b) = 0 . \end{aligned}$$

**Межові умови другого роду.** Розглянемо застосування методу скінчених інтегральних перетворень до розв'язання наступної межової задачі для одновимірного рівняння теплопровідності з межовими умовами другого роду

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} &= a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + f(x,t), \quad x \in (a,b), , \\ u(x,0) &= \varphi(x) , \\ \frac{\partial u(a,t)}{\partial x} &= \mu_1(t) , \quad \frac{\partial u(b,t)}{\partial x} = \mu_2(t) . \end{aligned}$$

У цьому випадку всі математичні викладки подібні до викладених вище. Розглянемо лише їх технічні відмінності. Головна відмінність виникає при знаходженні Фур'є-образу другої похідної за координатою від невідомої функції. Розглянемо її детальніше. У цьому разі

$$\begin{aligned} \int_{-a}^b R(k,x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} dx &= R(k,x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \Big|_a^b - \int_{-a}^b \frac{\partial R(k,x)}{\partial x} \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} dx = \\ &= R(k,x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \Big|_a^b - \frac{\partial R(k,x)}{\partial x} u(x,t) \Big|_a^b + \int_{-a}^b \frac{\partial^2 R(k,x)}{\partial x^2} u(x,t) dx . \end{aligned}$$

Якщо використати межові умови для невідомої функції, то зінтегрована частина інтегралу матиме вигляд

$$\begin{aligned} R(k,x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \Big|_a^b - \frac{\partial R(k,x)}{\partial x} u(x,t) \Big|_a^b &= \\ = R(k,b) \mu_2(t) - R(k,a) \mu_1(t) - \frac{\partial R(k,b)}{\partial x} u(b,t) + \frac{\partial R(k,a)}{\partial x} u(a,t) . \end{aligned}$$

Для того, щоб вона не залежала від невідомої функції необхідно, щоб ядро інтегрального перетворення задовольняло однорідним межовим умовам другого роду:

$$\frac{\partial R(k, a)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial R(k, b)}{\partial x} = 0.$$

Разом з іншою умовою, якій має задовольняти ядро інтегрального перетворення

$$\frac{\partial^2 R(k, x)}{\partial x^2} = -k^2 R(k, x),$$

ми отримаємо межову задачу для знаходження цього ядра.

Тепер зінтегрована частина інтегралу матиме вигляд

$$R(k, x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Big|_a^b - \frac{\partial R(k, x)}{\partial x} u(x, t) \Big|_a^b = R(k, b) \mu_2(t) - R(k, a) \mu_1(t).$$

Вихідне диференційне рівняння після застосування скінченного інтегрального перетворення тепер матиме вигляд

$$\frac{\partial U(k, t)}{\partial t} = -a^2 k^2 U(k, t) + F(k, t) + a^2 [R(k, b) \mu_2(t) - R(k, a) \mu_1(t)].$$

і разом з початковою умовою

$$U(k, 0) = \Phi(k)$$

дає задачу Коші для звичайного диференційного рівняння. Відміна цього рівняння від випадку межових умов третього роду лише у вигляді вільного члена цього рівняння. Подальші викладки аналогічні викладеним вище. Після застосування інтегрального перетворення Лапласа для зображення невідомої функції отримаємо

$$U(k, p) = \frac{\Phi(k)}{p + a^2 k^2} + \frac{F(k, p)}{p + a^2 k^2} + \frac{a^2}{p + a^2 k^2} [R(k, b) \mu_2(p) - R(k, a) \mu_1(p)].$$

Після виконання обернених перетворень Лапласа і Фур'є

$$u(x, t) = \sum_k \Phi(k) \exp(-a^2 k^2 t) R(k, x) + \sum_k \int_0^t \exp(-a^2 k^2 \tau) F(k, t - \tau) d\tau R(k, x) + a^2 \sum_k \int_0^t \exp(-a^2 k^2 \tau) [R(k, b) \mu_2(t - \tau) - R(k, a) \mu_1(t - \tau)] d\tau R(k, x).$$

**Межові умови першого роду.** Розглянемо тепер застосування методу скінчених інтегральних перетворень до розв'язання межової задачі для одновимірного рівняння теплопровідності з межовими умовами першого роду

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + f(x, t), \quad x \in (a, b),$$

$$u(x, 0) = \varphi(x),$$

$$u(a, t) = \mu_1(t), \quad u(b, t) = \mu_2(t).$$

У цьому випадку всі математичні викладки так само подібні викладеним вище. Розглянемо лише їх технічні відмінності. Головна відмінність виникає при знаходженні Фур'є-образу другої похідної за координатою від невідомої функції. Розглянемо її детальніше. У цьому разі

$$\int_{-a}^b R(k, x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} dx = R(k, x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Big|_a^b - \int_{-a}^b \frac{\partial R(k, x)}{\partial x} \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} dx =$$

$$= R(k, x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Big|_a^b - \frac{\partial R(k, x)}{\partial x} u(x, t) \Big|_a^b + \int_a^b \frac{\partial^2 R(k, x)}{\partial x^2} u(x, t) dx .$$

За використання межових умов для невідомої функції, зінтегрована частина матиме вигляд

$$\begin{aligned} & R(k, x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Big|_a^b - \frac{\partial R(k, x)}{\partial x} u(x, t) \Big|_a^b = \\ & = R(k, b) \frac{\partial u(b, t)}{\partial x} - R(k, a) \frac{\partial u(a, t)}{\partial x} - \frac{\partial R(k, b)}{\partial x} \mu_2(t) + \frac{\partial R(k, a)}{\partial x} \mu_1(t) . \end{aligned}$$

Для того, щоб вона не залежала від невідомої функції необхідно, щоб ядро інтегрального перетворення задовольняло однорідним межовим умовам першого роду:

$$R(k, a) = 0 , \quad R(k, b) = 0 .$$

Разом з іншою умовою, якій має задовольняти ядро інтегрального перетворення

$$\frac{\partial^2 R(k, x)}{\partial x^2} = -k^2 R(k, x)$$

ми отримаємо межову задачу для знаходження цього ядра.

Тепер зінтегрована частина інтегралу матиме вигляд

$$\begin{aligned} & R(k, x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Big|_a^b - \frac{\partial R(k, x)}{\partial x} u(x, t) \Big|_a^b = \\ & = \frac{\partial R(k, a)}{\partial x} \mu_1(t) - \frac{\partial R(k, b)}{\partial x} \mu_2(t) . \end{aligned}$$

Вихідне диференційне рівняння після застосування скінченного інтегрального перетворення тепер матиме вигляд

$$\frac{\partial U(k, t)}{\partial t} = -a^2 k^2 U(k, t) + F(k, t) + a^2 \left[ \frac{\partial R(k, a)}{\partial x} \mu_1(t) - \frac{\partial R(k, b)}{\partial x} \mu_2(t) \right] .$$

і разом з початковою умовою

$$U(k, 0) = \Phi(k)$$

дає задачу Коші для звичайного диференційного рівняння. Відміна цього рівняння від випадку межових умов третього роду лише у вигляді вільного члена цього рівняння. Подальші викладки аналогічні викладеним вище. Після застосування інтегрального перетворення Лапласа для зображення невідомої функції отримаємо

$$\begin{aligned} U(k, p) &= \frac{\Phi(k)}{p + a^2 k^2} + \frac{F(k, p)}{p + a^2 k^2} + \\ &+ \frac{a^2}{p + a^2 k^2} \left[ \frac{\partial R(k, a)}{\partial x} \mu_1(p) - \frac{\partial R(k, b)}{\partial x} \mu_2(p) \right] . \end{aligned}$$

Після виконання обернених перетворень Лапласа і Фур'є

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_k \Phi(k) \exp(-a^2 k^2 t) R(k, x) + \\ &+ \sum_k \int_0^t \exp(-a^2 k^2 \tau) F(k, t - \tau) d\tau R(k, x) + \\ &+ a^2 \sum_k \int_0^t \exp(-a^2 k^2 \tau) \left[ \frac{\partial R(k, a)}{\partial x} \mu_1(t - \tau) - \frac{\partial R(k, b)}{\partial x} \mu_2(t - \tau) \right] d\tau R(k, x) . \end{aligned}$$

При розв'язанні наведених вище межових задач першого, другого і третього родів ми лишили поза увагою можливі значення параметру  $k$ , так само як і конкретне знаходження ядра інтегрального перетворення. Виконаємо необхідні обчислення у разі межових умов першого роду. Як вже зазначалось вище, значення параметру  $k$ , за яким відбувається сумування, так само як і ядро скінченного інтегрального перетворення, може бути знайденим лише у висліді розв'язання наступної межової задачі, яка, до речі, належить до класу задач Штурма-Ліувілля з усіма наслідками цього щодо властивостей розв'язків

$$\frac{\partial^2 R(k, x)}{\partial x^2} + k^2 R(k, x) = 0 ,$$

$$R(k, a) = 0 , \quad R(k, b) = 0 .$$

Нехай, для простоти,  $a = 0$ ,  $b = l$ . Загальний розв'язок рівняння матиме вигляд

$$R(k, x) = A(k) \cos(kx) + B(k) \sin(kx) .$$

Підстановка його у межові умови дає два наступні рівняння щодо довільних функцій  $A(k), B(k)$  і параметру  $k$ :

$$R(k, 0) = A(k) = 0 ,$$

$$R(k, l) = B(k) \sin(kl) = 0 .$$

Вважаючи, що в останньому рівнянні  $B(k) \neq 0$ , ми отримуємо ті значення параметра  $k$ , що є коренями цього рівняння, а саме

$$k_n = \frac{n\pi}{l}, \quad n \in N .$$

Ці значення параметру  $k$ , для яких існують ненульові розв'язки даної задачі, називаються власними числами цієї задачі, а самі ненульові розв'язки називаються власними функціями. Останні мають вигляд

$$R(k_n, x) = \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) .$$

Ці функції є ортогональними з ваговою функцією рівною одиниці

$$\int_0^l \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{l} x\right) dx = 0, \quad n \neq m$$

і мають наступний квадрат норми

$$\| R(k_n, x) \|^2 = \int_0^l \sin^2\left(\frac{n\pi}{l} x\right) dx = \frac{l}{2} .$$

При цьому

$$\frac{\partial R(k_n, x)}{\partial x} = \frac{n\pi}{l} \cos\left(\frac{n\pi}{l} x\right) ,$$

Знайдений нами розв'язок вихідної задачі тепер матиме вигляд

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi(k_n) \exp\left(-\frac{a^2 n^2 \pi^2 t}{l^2}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \exp\left(-\frac{a^2 n^2 \pi^2 \tau}{l^2}\right) F(k_n, t - \tau) d\tau \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) +$$

$$+ a^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{l} \int_0^t \exp\left(-\frac{a^2 n^2 \pi^2 \tau}{l^2}\right) \times$$

$$\times \left[ \cos\left(\frac{n\pi}{l}a\right)\mu_1(t-\tau) - \cos\left(\frac{n\pi}{l}b\right)\mu_2(t-\tau) \right] d\tau \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right),$$

$$\Phi(k_n) = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) dx,$$

$$F(k_n, t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(x, t) \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) dx.$$

У разі однорідного рівняння з однорідними межовими умовами з отриманого виразу впливає наступний результат

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi(k_n) \exp\left(-\frac{a^2 n^2 \pi^2 t}{l^2}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right),$$

який легко отримується методом поділу змінних.

Подальші розрахунки можливі лише при конкретизації початкових і межових умов.

Фактично, кожного разу при підборі відповідного ядра інтегрального перетворення Фур'є нам необхідно розв'язати, рівняння Гельмгольца відповідної розмірності. Разом з межовими умовами першого, другого або третього родів рівняння Гельмгольца утворює задачу Штурма-Ліувілля. Констатація цього факту важлива з тої точки зору, що зазначена задача добре досліджена і її власні числа і власні функції, незалежно від конкретної реалізації задачі, мають ряд унікальних властивостей, важливих для застосувань. Розглянемо ще декілька варіантів розв'язання Задачі Штурма-Ліувілля в одновимірному випадку. Зауважимо, що розв'язання цієї задачі є у багатьох випадках необхідною складовою реалізації методу поділу змінних, розглянутому нами у наступному параграфі.

## 1.8. Одновимірне рівняння Гельмгольца

Крім випадку  $x \in [0, l]$ , вже частково розглянутого нами вище, інтерес становить і ряд більш складних випадків. Їх ми і розглянемо нижче.

**Проміжок**  $[a, b]$ .

Розглянемо задачу Штурма-Ліувілля для рівняння, розв'язками якого є тригонометричні та гіперболічні функції

$$\frac{d^2 f(x)}{dz^2} + \lambda f(x) = 0$$

з межовими умовами першого, другого та третього родів.

Почнемо розгляд з межових умов першого роду:

$$f(a) = 0, \quad f(b) = 0.$$

З теорії звичайних лінійних диференціальних рівнянь із сталими коефіцієнтами відомо, що загальний розв'язок рівняння у тригонометричній формі можна записати так

$$f(x) = A \cos(\sqrt{\lambda}x) + B \sin(\sqrt{\lambda}x).$$

Після підстановки розв'язку у межові умови, одержуємо систему лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь щодо довільних сталих  $A, B$ :

$$f(a) = A \cos(\sqrt{\lambda}a) + B \sin(\sqrt{\lambda}a) = 0,$$

$$f(b) = A \cos(\sqrt{\lambda}b) + B \sin(\sqrt{\lambda}b) = 0.$$

Оскільки ми шукаємо ненульовий розв'язок, то хоча б один з його коефіцієнтів повинен бути відмінним від нуля. Це можливо лише у разі, коли визначник отриманої системи рівнянь дорівнює нулю, тобто

$$\begin{vmatrix} \cos(\sqrt{\lambda}a) & \sin(\sqrt{\lambda}a) \\ \cos(\sqrt{\lambda}b) & \sin(\sqrt{\lambda}b) \end{vmatrix} = 0.$$

Обчислюючи цей визначник, одержуємо

$$\cos(\sqrt{\lambda}a) \sin(\sqrt{\lambda}b) - \sin(\sqrt{\lambda}a) \cos(\sqrt{\lambda}b) = 0,$$

або, якщо використати відому тригонометричну формулу

$$\sin(\alpha - \beta) = \cos(\alpha) \sin(\beta) - \sin(\alpha) \cos(\beta),$$

вираз набере вигляду:

$$\sin[\sqrt{\lambda}(b-a)] = 0.$$

Останнє можливе лише при умові, що

$$\sqrt{\lambda}(b-a) = n\pi.$$

Оскільки ліва частина цієї рівності додатна, то додатною має бути і права частина. Це можливо для  $n \in N$ . Отже, одержуємо наступний спектр власних чисел

$$\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{(a-b)^2}, \quad n \in N.$$

Відповідні власні функції матимуть вигляд

$$f_n(x) = A_n \cos(\sqrt{\lambda_n}x) + B_n \sin(\sqrt{\lambda_n}x),$$

при цьому один з коефіцієнтів  $A, B$  може бути вираженим через інший за допомогою або першої, або другої межових умов, наприклад,

$$A_n \cos(\sqrt{\lambda_n}a) + B_n \sin(\sqrt{\lambda_n}a) = 0.$$

Звідси

$$A_n = -B_n \tan(\sqrt{\lambda_n}a).$$

Легко довести, що  $\lambda = 0$  не є власним числом задачі. У разі  $n = 0$ , що відповідає  $\lambda = 0$ , загальний розв'язок рівняння має вигляд

$$f(x) = Ax + B.$$

Підстановка його у межові умови дає наступний результат:

$$f(a) = Aa + B = 0,$$

$$f(b) = Ab + B = 0.$$

Визначник цієї однорідної системи двох лінійних алгебраїчних рівнянь у загальному випадку не дорівнює нулю

$$\begin{vmatrix} a & 1 \\ b & 1 \end{vmatrix} = a - b \neq 0,$$

отже система має лише нульовий розв'язок, тобто  $f(x) = 0$ . Відповідно до цього,  $\lambda = 0$  не є власним числом першої межової задачі. Цей же результат впливає і із загальної теорії задачі Штурма-Ліувілля.

Розглянемо тепер межові умови другого роду:



$$\frac{df(a)}{dx} = 0, \quad \frac{df(b)}{dx} = 0 .$$

Відповідно до загальних властивостей власних чисел задачі Штурма-Ліувілля, для другої межевої задачі, власні числа можуть бути лише невід'ємними. При цьому для  $\lambda > 0$  загальний розв'язок має вигляд

$$f(x) = A \cos(\sqrt{\lambda}x) + B \sin(\sqrt{\lambda}x),$$

для  $\lambda = 0$

$$f(x) = C + Dx .$$

Розглянемо спочатку випадок  $\lambda > 0$ . Після підстановки цього розв'язку у межові умови, одержуємо:

$$\frac{df(a)}{dx} = -A\sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda}a) + B\sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda}a) = 0 ,$$

$$\frac{df(b)}{dx} = -A\sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda}b) + B\sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda}b) = 0 .$$

Оскільки розв'язок за умовою ненульовий, то хоча б один з його коефіцієнтів має бути відмінним від нуля. Це можливо лише тоді, коли

$$\begin{vmatrix} -\sin(\sqrt{\lambda}a) & \cos(\sqrt{\lambda}a) \\ -\sin(\sqrt{\lambda}b) & \cos(\sqrt{\lambda}b) \end{vmatrix} = 0 .$$

Обчислюючи цей визначник, одержуємо

$$\sqrt{\lambda}[\cos(\sqrt{\lambda}b)\sin(\sqrt{\lambda}a) - \sin(\sqrt{\lambda}b)\cos(\sqrt{\lambda}a)] = 0 ,$$

або

$$\sqrt{\lambda} \sin[\sqrt{\lambda}(b-a)] = 0 .$$

Останнє можливе лише при умові, що

$$\sqrt{\lambda}(b-a) = n\pi ,$$

де, для  $\lambda > 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Звідки і одержуємо спектр власних чисел, що збігається з попереднім. Оскільки у другої межевої задачі є і нульове власне число, тому зразу запишемо загальний результат

$$\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{(b-a)^2} , \quad n = 0, 1, 2, \dots .$$

Відповідні власні функції матимуть подібний вигляд

$$f_n(x) = A_n \cos(\sqrt{\lambda_n}x) + B_n \sin(\sqrt{\lambda_n}x) ,$$

але зв'язок між коефіцієнтами  $A, B$  буде дещо іншим, оскільки іншими є межові умови, з яких впливає цей зв'язок. Дійсно,

$$-A_n \sqrt{\lambda_n} \sin(\sqrt{\lambda_n}a) + B_n \sqrt{\lambda_n} \cos(\sqrt{\lambda_n}a) = 0 .$$

Звідси

$$A_n = B_n \sqrt{\lambda_n} \cot(\sqrt{\lambda_n}a) .$$

Нехай тепер  $\lambda = 0$ . Підстановка загального розв'язку рівняння в обидві межові умови дає одне співвідношення

$$D = 0 .$$

Таким чином, для власного числа  $\lambda = 0$  власною функцією є

$$f_0(x) = C .$$

Розглянемо нарешті випадок межових умов третього роду:

$$\alpha_1 \frac{df(a)}{dx} - \beta_1 f(a) = 0,$$

$$\alpha_2 \frac{df(b)}{dx} + \beta_2 f(b) = 0.$$

Оскільки дана задача належить до задач Штурма-Ліувілля, то власні числа цієї задачі не можуть бути від'ємними. Розглянемо спочатку випадок додатних власних чисел  $\lambda > 0$ , які завжди існують. Після підстановки загального розв'язку у ці межові умови, вони наберуть вигляду:

$$A[\beta_1 \cos(\sqrt{\lambda}a) + \alpha_1 \sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda}a)] +$$

$$+ B[\beta_1 \sin(\sqrt{\lambda}a) - \alpha_1 \sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda}a)] = 0,$$

$$A[\beta_2 \cos(\sqrt{\lambda}b) - \alpha_2 \sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda}b)] +$$

$$+ B[\beta_2 \sin(\sqrt{\lambda}b) + \alpha_2 \sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda}b)] = 0.$$

Аналогічно попередньому, власні числа знаходяться з рівняння:

$$\begin{vmatrix} \beta_1 \cos(\sqrt{\lambda}a) + & \beta_1 \sin(\sqrt{\lambda}a) - \\ +\alpha_1 \sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda}a) & -\alpha_1 \sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda}a) \\ \beta_2 \cos(\sqrt{\lambda}b) - & \beta_2 \sin(\sqrt{\lambda}b) + \\ -\alpha_2 \sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda}b) & +\alpha_2 \sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda}b) \end{vmatrix} = 0.$$

Після розкриття визначника, рівнянню можна надати вигляд

$$(\beta_1 \beta_2 - \lambda \alpha_1 \alpha_2) \sin[\sqrt{\lambda}(b-a)] +$$

$$+ (\alpha_1 \beta_2 + \beta_1 \alpha_2) \sqrt{\lambda} \cos[\sqrt{\lambda}(b-a)] = 0.$$

Власні числа даної задачі є розв'язками цього трансцендентного рівняння. Останнє, на відміну від межових задач першого і другого роду, можна розв'язати лише чисельно. Власні функції цієї задачі мають вигляд

$$f_n(x) = A_n \cos(\sqrt{\lambda_n}x) + B_n \sin(\sqrt{\lambda_n}x),$$

де зв'язок між коефіцієнтами  $A_n, B_n$  визначається будь-якою з двох межових умов.

Розглянемо тепер випадок  $\lambda = 0$ . Підстановка загального розв'язку рівняння  $f(x) = C + Dx$  в обидві межові умови дає наступну систему лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь відносно коефіцієнтів  $C$  і  $D$ :

$$C(\alpha_1 - \beta_1 a) + \beta_1 D = 0,$$

$$C(\alpha_2 + \beta_2 b) + \beta_2 D = 0.$$

Її визначник

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 - \beta_1 a & \beta_1 \\ \alpha_2 + \beta_2 b & \beta_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

очевидно відмінний від нуля, що можливо лише за умови, що система має лише нульові розв'язки, тобто  $C = D = 0$ . Таким чином,  $\lambda = 0$  не є власним числом даної межової задачі. Цей же результат впливає і з загальної теорії задачі Штурма-Ліувілля.

Власні функції третьої межової задачі матимуть вигляд

$$f_n(x) = A_n \cos(\sqrt{\lambda_n}x) + B_n \sin(\sqrt{\lambda_n}x),$$

де зв'язок між коефіцієнтами  $A, B$  отримується через будь-які з межових умов, наприклад,

$$A_n[\beta_1 \cos(\sqrt{\lambda_n} a) + \alpha_1 \sqrt{\lambda_n} \sin(\sqrt{\lambda_n} a)] + \\ + B_n[\beta_1 \sin(\sqrt{\lambda_n} a) - \alpha_1 \sqrt{\lambda_n} \cos(\sqrt{\lambda_n} a)] = 0,$$

Звідси

$$A_n = -B_n \frac{\beta_1 \sin(\sqrt{\lambda_n} a) - \alpha_1 \sqrt{\lambda_n} \cos(\sqrt{\lambda_n} a)}{\beta_1 \cos(\sqrt{\lambda_n} a) + \alpha_1 \sqrt{\lambda_n} \sin(\sqrt{\lambda_n} a)}.$$

Характерною рисою власних функцій всіх розглянутих у параграфі межових задач є те, що вони не є ні парними, ні непарними. Такими вони залишаються і у разі інших проміжків, розглянутих нижче. Тому далі ми розглянемо лише межові умови першого і другого родів.

**Проміжок  $[0, l]$ .**

Розглянемо задачу Штурма-Ліувілля для рівняння

$$\frac{d^2 f(x)}{dz^2} + \lambda f(x) = 0$$

для проміжку, однією з границь якого є початок координат, з межовими умовами першого, другого та третього родів.

Почнемо розгляд з межових умов першого роду:

$$f(0) = 0, \quad f(l) = 0.$$

Загальний розв'язок цього рівняння для  $\lambda > 0$  має вигляд

$$f(x) = A \cos(\sqrt{\lambda} x) + B \sin(\sqrt{\lambda} x).$$

Після підстановки розв'язку у межові умови, одержимо:

$$f(0) = A = 0,$$

$$f(l) = B \sin(\sqrt{\lambda} l) = 0.$$

Ця система рівнянь є значно простішою за аналогічну систему у разі довільного проміжку і дозволяє безпосередньо знайти з першого рівняння одну з довільних сталих  $A = 0$ , а з другого - спектр власних чисел. Дійсно, оскільки  $B \neq 0$ , інакше ми мали б лише нульовий розв'язок, то

$$\sin(\sqrt{\lambda} l) = 0.$$

У висліді одержуємо наступний спектр власних чисел

$$\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{l^2}, \quad n \in N.$$

що збігається з спектром першої межової задачі для довільного проміжку. Відповідні власні функції матимуть вигляд

$$f_n(x) = \sin(\sqrt{\lambda_n} x).$$

Оскільки власні функції задачі Штурма-Ліувілля визначені з точністю до довільного множника, то, для простоти, ми поклали його рівним одиниці. Характерною ознакою цих власних функцій є те, що всі вони непарні.

Відповідно до загальних властивостей власних чисел задачі Штурма-Ліувілля для другої межової задачі, ці власні числа можуть бути лише невід'ємними. При цьому для  $\lambda > 0$  загальний розв'язок має вигляд

$$f(x) = A \cos(\sqrt{\lambda} x) + B \sin(\sqrt{\lambda} x),$$

для  $\lambda = 0$

$$f(x) = C + Dx$$

і межові умови задовольняються лише у разі нульових коефіцієнтів. Тобто  $\lambda = 0$  не є власним числом.

Розглянемо тепер межові умови другого роду:

$$\frac{df(0)}{dx} = 0, \\ \frac{df(l)}{dx} = 0.$$

Візьмемо спочатку випадок  $\lambda > 0$ . Після підстановки розв'язку у межові умови, одержимо:

$$\frac{df(0)}{dx} = B = 0, \\ \frac{df(l)}{dx} = -A\sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda}l) = 0.$$

Ця система рівнянь теж значно простіша за аналогічну систему у разі довільного проміжку і дозволяє безпосередньо знайти з першого рівняння одну з довільних сталих  $B = 0$ , з другого рівняння - спектр власних чисел. Дійсно, оскільки  $A \neq 0$ , інакше ми мали б лише нульовий розв'язок, то

$$\sin(\sqrt{\lambda}l) = 0.$$

Звідси

$$\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{l^2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Тут присутнє  $n = 0$ , оскільки таке його значення відповідає  $\lambda = 0$ , що для другої межової задачі Штурма-Ліувілля є власним числом. У висліді ми одержуємо спектр власних чисел, що збігається з спектром першої межової задачі для довільного проміжку, крім власного числа  $\lambda = 0$ . Відповідні власні функції матимуть вигляд

$$f_n(x) = \cos(\sqrt{\lambda_n}x).$$

Характерною їх ознакою є те, що всі вони парні.

**Проміжок**  $[-l, l]$ .

У зазначеному випадку задача Штурма-Ліувілля має вигляд

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} + \lambda f(x) = 0$$

з межовими умовами першого, другого та третього родів.

Почнемо розгляд з межових умов першого роду:

$$f(-l) = 0, \quad f(l) = 0.$$

Як було показано вище, загальний розв'язок цього рівняння для  $\lambda > 0$  має вигляд

$$f(x) = A \cos(\sqrt{\lambda}x) + B \sin(\sqrt{\lambda}x).$$

Після підстановки розв'язку у межові умови, одержуємо наступну систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно коефіцієнтів  $A, B$ :

$$f(-l) = A \cos(\sqrt{\lambda}l) - B \sin(\sqrt{\lambda}l) = 0, \\ f(l) = A \cos(\sqrt{\lambda}l) + B \sin(\sqrt{\lambda}l) = 0.$$

Оскільки цей розв'язок за умовою є ненульовим, то хоча б один з його довільних коефіцієнтів має бути ненульовим. Це можливо лише у разі, якщо визначник матриці системи однорідних рівнянь дорівнює нулю

$$\begin{vmatrix} \cos(\sqrt{\lambda}l) & -\sin(\sqrt{\lambda}l) \\ \cos(\sqrt{\lambda}l) & \sin(\sqrt{\lambda}l) \end{vmatrix} = 0.$$

Обчислюючи цей визначник, маємо

$$\cos(\sqrt{\lambda}l) \sin(\sqrt{\lambda}l) = \sin(2\sqrt{\lambda}l) = 0.$$

Останнє можливе лише при умові, що

$$2\sqrt{\lambda}l = n\pi,$$

де  $n = 1, 2, \dots$ . Тут відсутнє  $n = 0$ , оскільки таке його значення відповідає  $\lambda = 0$ , але перша межа задача таке власне число відсутнє. У висліді одержуємо наступний спектр власних чисел

$$\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{4l^2}, \quad n \in N.$$

Відповідні власні функції матимуть вигляд

$$f_n(x) = A_n \cos(\sqrt{\lambda_n}x) + B_n \sin(\sqrt{\lambda_n}x).$$

При цьому один з коефіцієнтів  $A, B$  можна виразити через інший, використавши будь-яку з межових умов, наприклад,

$$A_n \cos(n\pi/2) = B_n \sin(n\pi/2).$$

Якщо  $n$  парне, то це рівняння має вигляд

$$A_n = 0,$$

і власними функціями будуть непарні функції

$$f_n(x) = \sin(\sqrt{\lambda_n}x).$$

Якщо ж  $n$  непарне, то це рівняння має вигляд

$$B_n = 0,$$

і власними функціями будуть парні функції

$$f_n(x) = \cos(\sqrt{\lambda_n}x).$$

Отже, у разі симетричного проміжку, власними функціями будуть окремо парні і окремо непарні власні функції.

Розглянемо тепер межові умови другого роду:

$$\begin{aligned} \frac{df(-l)}{dx} &= 0, \\ \frac{df(l)}{dx} &= 0. \end{aligned}$$

Відповідно до загальних властивостей власних чисел задачі Штурма-Ліувілля для другої межової задачі, ці власні числа можуть бути лише невід'ємними. При цьому для  $\lambda > 0$  загальний розв'язок має вигляд

$$f(x) = A \cos(\sqrt{\lambda}x) + B \sin(\sqrt{\lambda}x).$$

Для  $\lambda = 0$

$$f(x) = C + Dx.$$

Розглянемо спочатку випадок  $\lambda > 0$ . Після підстановки цього розв'язку у межові умови, одержуємо:

$$\frac{df(-l)}{dx} = A\sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda}l) + B\sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda}l) = 0,$$

$$\frac{df(l)}{dx} = -A\sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda}l) + B\sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda}l) = 0.$$

Оскільки цей розв'язок за умовою є ненульовим, то хоча б один з коефіцієнтів цього розв'язку повинен бути відмінним від нуля. Це можливо лише у разі, коли визначник системи дорівнює нулю

$$\begin{vmatrix} \sin(\sqrt{\lambda}l) & \cos(\sqrt{\lambda}l) \\ -\sin(\sqrt{\lambda}l) & \cos(\sqrt{\lambda}l) \end{vmatrix} = 0.$$

Обчислюючи цей визначник, одержуємо

$$\cos(\sqrt{\lambda}b) \sin(\sqrt{\lambda}a) = 0$$

або

$$\sin(2\sqrt{\lambda}l) = 0$$

Звідки знаходимо спектр власних чисел

$$\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{4l^2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Відповідні власні функції матимуть подібний вигляд

$$f_n(x) = A_n \cos(\sqrt{\lambda_n}x) + B_n \sin(\sqrt{\lambda_n}x),$$

але зв'язок між коефіцієнтами  $A, B$  буде дещо іншим, а саме

$$B_n \cos(n\pi/2) = -A_n \sin(n\pi/2).$$

Якщо  $n$  парне, то це рівняння має вигляд

$$B_n = 0,$$

і власними функціями будуть парні функції

$$f_n(x) = \cos(\sqrt{\lambda_n}x).$$

Якщо ж  $n$  непарне, то це рівняння має вигляд

$$A_n = 0,$$

і власними функціями будуть непарні функції

$$f_n(x) = \sin(\sqrt{\lambda_n}x).$$

Отже, у разі симетричного проміжку, власними функціями другої межевої задачі теж будуть окремо парні, і окремо непарні власні функції. Порядок їх чергування буде оберненим відносно порядку чергування парних і непарних власних функцій першої межевої задачі.

Близькість методу скінченного інтегрального перетворення Фур'є і методу поділу змінних робить доцільним викладення тут останнього.

## 1.9. Метод поділу змінних

### Межова задача для однорідного хвильового рівняння

Розглянемо метод поділу змінних на прикладі хвильового рівняння. Отже, однорідне хвильове рівняння у тривимірному випадку має вигляд

$$\frac{\partial^2 u(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = a^2 \Delta u(\mathbf{r}, t).$$

Межові умови, як і раніше, нехай будуть першого, другого або третього родів. Явно ми їх розглядати не будемо, оскільки цікавитимемося лише часовою залежністю розв'язку. Сформулюємо початкові умови у вигляді умов Коші

$$u(\mathbf{r}, 0) = \varphi(\mathbf{r}),$$

$$\frac{\partial u(\mathbf{r}, 0)}{\partial t} = \psi(\mathbf{r}).$$

Такі умови доцільно використовувати тоді, коли момент спостереження за поведінкою системи не дуже віддалений від початку процесу у ній. У цьому разі початкові умови суттєво впливають на процеси в момент спостереження. При такому підході ми можемо досліджувати процеси у системі ще до виходу їх у стаціонарний режим, якщо останній можливий, або перехідні процеси, якщо стаціонарний режим фізично не можливий.

Будемо шукати частинні розв'язки допоміжної задачі (рівняння разом з межовими умовами) у вигляді

$$u(\mathbf{r}, t) = R(\mathbf{r})T(t).$$

Після підстановки його у рівняння, воно матиме вигляд

$$\frac{1}{a^2} \frac{1}{T(t)} \frac{d^2 T(t)}{dt^2} = \frac{1}{R(\mathbf{r})} \Delta R(\mathbf{r}) = -\omega^2,$$

де ми ввели сталу поділу  $\omega^2$ . Остання подвійна рівність еквівалентна двом наступним диференціальним рівнянням, одне з яких вже звичайне:

$$\frac{d^2 T(t)}{dt^2} + a^2 \omega^2 T(t) = 0,$$

$$\Delta R(\mathbf{r}) + \omega^2 R(\mathbf{r}) = 0.$$

Друге рівняння є рівнянням Гельмгольца. Разом з межовими умовами першого, другого або третього родів, які для простоти ми явно не випикуємо, воно утворює задачу Штурма-Ліувілля. Вище ми розглянули декілька простих варіантів цієї задачі. Надалі не будемо конкретизувати цю задачу, вважаючи її власні функції  $R_n(\mathbf{r})$  і числа  $\omega_n$  відомими ( $\Delta R_n(\mathbf{r}) + \omega_n^2 R_n(\mathbf{r}) = 0$ ). Очевидно власні функції ортогональні

$$\int_V \rho(\mathbf{r}) R_n(\mathbf{r}) R_m(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \delta_{nm},$$

де  $\rho(\mathbf{r})$  - вагова функція,  $\delta_{nm}$  - символ Кронекера. Тепер шукані частинні розв'язки допоміжної задачі можна записати так

$$u_n(\mathbf{r}, t) = R_n(\mathbf{r})T_n(t).$$

Тут  $T_n(t)$  - загальний розв'язок першого рівняння системи

$$\frac{d^2 T_n(t)}{dt^2} + a^2 \omega_n^2 T_n(t) = 0.$$

Цей розв'язок має вигляд

$$T_n(t) = A_n \cos(a\omega_n t) + B_n \sin(a\omega_n t).$$

Загальний розв'язок основної задачі є сумою всіх знайдених частинних розв'язків, а отже, може бути записаним у вигляді

$$u(\mathbf{r}, t) = \sum_n R_n(\mathbf{r}) [A_n \cos(a\omega_n t) + B_n \sin(a\omega_n t)].$$

Видно, що єдиним збуренням, яке викликає коливальний процес у системі, є початкові умови. Цей процес є незатухаючим, оскільки у використаному нами хвильовому рівнянні ніде не закладена дисипація енергії системи. Знайдемо похідну розв'язку за часом

$$\frac{\partial u(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \sum_n R_n(r) [-a\omega_n A_n \sin(a\omega_n t) + a\omega_n B_n \cos(a\omega_n t)] .$$

Довільні сталі у загальному розв'язку визначатимуться з початкових умов:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \sum_n A_n R_n(r) ,$$

$$\psi(\mathbf{r}) = \sum_n a\omega_n B_n R_n(r) .$$

Ці умови є нічим іншим як рядами Фур'є за власними функціями задачі Штурма-Ліувілля для рівняння Гельмгольца. Коефіцієнти рядів є:

$$A_n = \frac{1}{\|R_n\|_V^2} \int_V \rho(\mathbf{r}) R_n(\mathbf{r}) \varphi(\mathbf{r}) d\mathbf{r} ,$$

$$B_n = \frac{1}{a\omega_n \|R_n\|_V^2} \int_V \rho(\mathbf{r}) R_n(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}) d\mathbf{r} .$$

Тут

$$\int_V \rho(\mathbf{r}) R_n^2(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \|R_n\|^2$$

- квадрат норми відповідної власної функції.

**Приклад 25.** Одновимірне однорідне хвильове рівняння з однорідними межовими умовами першого роду має наступний розв'язок:

$$U(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos(a\omega_n t) + B_n \sin(a\omega_n t)] \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) ,$$

$$\omega_n^2 = \frac{n^2 \pi^2}{l^2} ,$$

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) dx ,$$

$$B_n = \frac{2}{a\omega_n l} \int_0^l \psi(x) \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) dx .$$

Тут ми використали наведений вище розв'язок одновимірного рівняння Гельмгольца.

**Приклад 26.** Двовимірне однорідне хвильове рівняння з однорідними межовими умовами першого роду для прямокутника має розв'язок

$$u(x, y, t) = \sum_{n,m=1}^{\infty} [A_{nm} \cos(a\omega_{nm} t) + B_{nm} \sin(a\omega_{nm} t)] \times$$

$$\times \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{h} y\right) ,$$

$$\omega_{nm}^2 = \pi^2 \left( \frac{n^2}{l^2} + \frac{m^2}{h^2} \right) ,$$

$$A_n = \frac{4}{lh} \int_0^l dx \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) \int_0^h \varphi(x, y) \sin\left(\frac{m\pi}{h} y\right) dy ,$$



$$B_n = \frac{4}{a\omega_{nm}lh} \int_0^l dx \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \int_0^h \psi(x, y) \sin\left(\frac{m\pi}{h}y\right) dy.$$

Тут ми використали наведений вище розв'язок одновимірного рівняння Гельмгольца. При цьому зауважимо, що у даному випадку нам потрібно розв'язати двовимірне рівняння Гельмгольца у Декартові системі координат, яке, однак, приводиться до системи двох одновимірних рівнянь Гельмгольца з однорідними межовими умовами першого роду.

**Приклад 27.** Тривимірне однорідне хвильове рівняння з однорідними межовими умовами першого роду для паралелепіпеда має розв'язок

$$U(x, y, z, t) = \sum_{n,m,k=1}^{\infty} [A_{nmk} \cos(a\omega_{nmk}t) + B_{nmk} \sin(a\omega_{nmk}t)] \times \\ \times \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{h}y\right) \sin\left(\frac{k\pi}{s}z\right), \\ \omega_{nmk}^2 = \pi^2 \left( \frac{n^2}{l^2} + \frac{m^2}{h^2} + \frac{k^2}{s^2} \right), \\ A_{nmk} = \frac{8}{lhs} \int_0^l dx \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \int_0^h dy \sin\left(\frac{m\pi}{h}y\right) \int_0^s \varphi(x, y, z) \sin\left(\frac{k\pi}{s}z\right) dz, \\ B_{nmk} = \frac{8}{a\omega_{nmk}lhs} \int_0^l dx \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \int_0^h dy \sin\left(\frac{m\pi}{h}y\right) \int_0^s \psi(x, y, z) \sin\left(\frac{k\pi}{s}z\right) dz.$$

Тут ми використали наведений вище розв'язок одновимірного рівняння Гельмгольца. При цьому зауважимо, що у даному випадку нам потрібно розв'язати тривимірне рівняння Гельмгольца у Декартові системі координат, яке, однак, приводиться до системи трьох одновимірних рівнянь Гельмгольца з однорідними межовими умовами першого роду.

**Приклад 28.** Двовимірне однорідне хвильове рівняння з однорідними межовими умовами першого роду для області у формі круга має наступний розв'язок

$$u(r, \varphi, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} [A_{nm} \cos(a\omega_{nm}t) + B_{nm} \sin(a\omega_{nm}t)] \times \\ \times J_n\left(\frac{\mu_{nm}}{r_0}r\right) \exp(in\varphi) \exp\left(-a^2 \frac{\mu_{nm}}{r_0}t\right), \\ A_{nm} = \frac{2}{\pi r_0^2 [J_{n+1}(\mu_{nm})]^2} \int_0^{2\pi} d\theta \exp(in\theta) \int_0^{r_0} \varphi(r, \varphi) J_n\left(\frac{\mu_{nm}}{r_0}r\right) r dr, \\ B_{nm} = \frac{2}{a\omega_{nm} \pi r_0^2 [J_{n+1}(\mu_{nm})]^2} \int_0^{2\pi} d\theta \exp(in\theta) \int_0^{r_0} \psi(r, \varphi) J_n\left(\frac{\mu_{nm}}{r_0}r\right) r dr. \\ \omega_{nm} = \frac{\mu_{nm}}{r_0}.$$

Тут  $J_n(\alpha r)$  функції Бесселя.

**Приклад 29.** Тривимірне однорідне хвильове рівняння з однорідними межовими умовами першого роду для кулі має наступний розв'язок

$$U(r, \theta, \varphi, t) = \sum_{n,k=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n [A_{nmk} \cos(a\omega_{nk}t) + B_{nmk} \sin(a\omega_{nk}t)] \times$$

$$\begin{aligned} & \times \frac{1}{\sqrt{r}} J_{n+1/2} \left( \frac{\mu_{nk}}{r_0} r \right) Y_{nm}(\theta, \varphi), \\ & \omega_{nk} = \frac{\mu_{nk}}{r_0}, \\ & A_{nmk} = \frac{2}{r_0^2 [J_{n+3/2}(\mu_{nk})]^2} \times \\ & \times \int d\Omega Y_{nm}(\theta, \varphi) \int_0^{r_0} \varphi(r, \theta, \varphi) J_{n+1/2} \left( \frac{\mu_{nk}}{r_0} r \right) r^{3/2} dr, \\ & B_{nmk} = \frac{2}{a\omega_{nk} r_0^2 [J_{n+3/2}(\mu_{nk})]^2} \times \\ & \times \int d\Omega Y_{nm}(\theta, \varphi) \int_0^{r_0} \psi(r, \theta, \varphi) J_{n+1/2} \left( \frac{\mu_{nk}}{r_0} r \right) r^{3/2} dr. \end{aligned}$$

Тут  $Y_{nm}(\theta, \varphi)$  сферичні функції.

**Приклад 30.** Тривимірне однорідне хвильове рівняння з однорідними межовими умовами першого роду для циліндру має наступний розв'язок

$$\begin{aligned} U(r, \varphi, z, t) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n,k=1}^{\infty} [A_{nmk} \cos(a\omega_{mk}t) + B_{nmk} \sin(a\omega_{mk}t)] \times \\ & \times J_m \left( \frac{\mu_{mk}}{r_0} r \right) \sin \left( \frac{n\pi}{h} z \right) \exp(im\varphi), \\ & \omega_{mk} = \frac{\mu_{mk}}{r_0}, \\ & A_{nmk} = \frac{4}{\pi h r_0^2 [J_{m+1}(\mu_{mk})]^2} \times \\ & \times \int_0^h dz \sin \left( \frac{n\pi}{h} z \right) \int_0^{2\pi} d\theta \cos(m\theta) \int_0^{r_0} \varphi(r, \varphi, z) J_m \left( \frac{\mu_{mk}}{R} r \right) r dr, \\ & B_{nmk} = \frac{4}{a\omega_{mk} \pi h r_0^2 [J_{m+1}(\mu_{mk})]^2} \times \\ & \times \int_0^h dz \sin \left( \frac{n\pi}{h} z \right) \int_0^{2\pi} d\theta \cos(m\theta) \int_0^{r_0} \psi(r, \varphi, z) J_m \left( \frac{\mu_{mk}}{R} r \right) r dr. \end{aligned}$$

Фактично застосування методу поділу змінних вичерпується задачами для однорідних диференціальних рівнянь з однорідними межовими умовами. Будь-які ускладнення задачі вимагають вже застосування інших методів, хоча в їх основі і лежать результати, отримані методом поділу змінних. З фізичної точки зору неоднорідність диференціального рівняння та початкових і межових умов мають рівноправним чином впливати на розв'язок. Саме таку рівноправність зберігає метод скінченного інтегрального перетворення Фур'є. Проте метою даного розгляду є якраз висвітлення альтернативних методів розв'язання задач, незважаючи на всю їх незручність.

**Неоднорідні межові умови.** Неоднорідні межові умови серйозно ускладнюють розв'язання межових задач, якщо не використовувати метод скінчених інтегральних перетворень Фур'є. Проте

є ряд випадків, коли межові задачі з неоднорідними межовими умовами легко може бути зведена до задачі з однорідними межовими умовами. Одну з таких можливостей розглянемо на прикладі одновимірного хвильового рівняння.

Розглянемо першу межову задачу для одновимірного неоднорідного хвильового рівняння з неоднорідними межовими умовами

$$\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2} + f(x,t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < \infty,$$

$$U(x,0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial U(x,0)}{\partial t} = \psi(x),$$

$$U(0,t) = \mu_1(t), \quad U(l,t) = \mu_2(t).$$

Наведену задачу можна звести до попередньої, якщо замість невідомої функції  $U(x,t)$  ввести невідому функцію  $V(x,t)$ , для якої межові умови вже будуть однорідними. Для межових задач першого і другого роду це робиться наступним чином

$$U(x,t) = V(x,t) + W(x,t),$$

або

$$V(x,t) = U(x,t) - W(x,t).$$

Тут функція  $W(x,t)$  для першої межової задачі підбирається так, що  $W(0,t) = \mu_1(t)$ ,  $W(l,t) = \mu_2(t)$ . Зробити це можна безліччю способами. Один з них наступний

$$W(x,t) = \mu_1(t) + x[\mu_2(t) - \mu_1(t)]/l.$$

У цьому разі

$$V(0,t) = U(0,t) - W(0,t) = 0,$$

$$V(l,t) = U(l,t) - W(l,t) = 0.$$

При спрощенні межових умов дещо ускладняться рівняння і початкова умова. Дійсно, для функції  $V(x,t)$  початкові умови будуть наступними

$$V(x,0) = \varphi(x) - W(x,0),$$

$$\frac{\partial V(x,0)}{\partial t} = \psi(x) - \frac{\partial W(x,0)}{\partial t}.$$

а рівняння матиме вільний член складнішої структури

$$\frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x^2} + f(x,t) - \frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial x^2}.$$

Для межових умов другого роду функцію  $W(x,t)$  можна підібрати так

$$W(x,t) = \mu_1(t) + x^2[\mu_2(t) - \mu_1(t)]/2l^2.$$

Розглянемо тепер попередню межову задачу, але для неоднорідного одновимірного хвильового рівняння для довільного вільного члену. При цьому вважатимемо для нього виконаними умови збіжності ряду Фур'є.

Знову розглянемо неоднорідне хвильове рівняння

$$\frac{\partial^2 u(\mathbf{r},t)}{\partial t^2} = a^2 \Delta u(\mathbf{r},t) + f(\mathbf{r},t).$$

Межові умови, як і раніше, нехай будуть першого, другого або третього родів. Явно ми їх розглядати не будемо, оскільки нас цікавитиме лише часова залежність розв'язку. Початкові умови нехай мають вигляд:

$$u(\mathbf{r},0) = \varphi(\mathbf{r}), \quad \frac{\partial u(\mathbf{r},0)}{\partial t} = \psi(\mathbf{r}).$$

Використаємо для розв'язку перетворення Лап- ласа. Припускаючи існування Лаплас-образу шуканої функції, маємо:

$$u(\mathbf{r}, t) =: U(\mathbf{r}, \omega) ,$$

$$\frac{\partial^2 u(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} =: p^2 U(\mathbf{r}, \omega) - pu(\mathbf{r}, 0) - \frac{\partial u(\mathbf{r}, 0)}{\partial t} ,$$

$$f(\mathbf{r}, t) =: F(\mathbf{r}, \omega) .$$

Після підстановки знайдених зображень у рівняння, маємо

$$p^2 U(\mathbf{r}, p) - p\varphi(\mathbf{r}) - \psi(\mathbf{r}) = a^2 \Delta U(\mathbf{r}, p) + F(\mathbf{r}, p) ,$$

або

$$\Delta U(\mathbf{r}, p) - \frac{p^2}{a^2} U(\mathbf{r}, p) = -\Phi(\mathbf{r}, p) ,$$

де

$$\Phi(\mathbf{r}, p) = \frac{1}{a^2} [F(\mathbf{r}, p) + p\varphi(\mathbf{r}) + \psi(\mathbf{r})] .$$

У висліді ми отримали неоднорідне рівняння Гельмгольца. Якщо власні функції та власні числа однорідного рівняння Гельмгольца  $R_n(\mathbf{r})$ ,  $\omega_n$  ( $\Delta R_n(\mathbf{r}) + \omega_n^2 R_n(\mathbf{r}) = 0$ ), то його розв'язок має вигляд

$$U(\mathbf{r}, p) = a^2 \sum_n \frac{\Phi_n(p)}{p^2 + a^2 \omega_n^2} R_n(\mathbf{r}) ,$$

або

$$U(\mathbf{r}, p) = \sum_n \frac{F_n(p)}{p^2 + a^2 \omega_n^2} R_n(\mathbf{r}) +$$

$$+ \sum_n \frac{p\varphi_n}{p^2 + a^2 \omega_n^2} R_n(\mathbf{r}) + \sum_n \frac{\psi_n}{p^2 + a^2 \omega_n^2} R_n(\mathbf{r}) .$$

Тут коефіцієнти Фур'є визначаються наступним чином:

$$\varphi_n = \frac{1}{\|R_n\|_v^2} \int \rho(\mathbf{r}) \varphi(\mathbf{r}) R_n(\mathbf{r}) d\mathbf{r} ,$$

$$\psi_n = \frac{1}{\|R_n\|_v^2} \int \rho(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}) R_n(\mathbf{r}) d\mathbf{r} ,$$

$$F_n(p) = \frac{1}{\|R_n\|_v^2} \int \rho(\mathbf{r}) F(\mathbf{r}, p) R_n(\mathbf{r}) d\mathbf{r} .$$

Для знаходження оригіналу використаємо табличні зображення:

$$\cos(\omega_n t) = \frac{p}{p^2 + \omega_n^2} ,$$

$$\sin(\omega_n t) = \frac{\omega_n}{p^2 + \omega_n^2} .$$

і властивість перетворення Лапласа під назвою - зображення згортки

$$F_1(p)F_2(p) =: \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau .$$

Тоді

$$u(\mathbf{r}, t) = \sum_n \frac{1}{a\omega_n} R_n(\mathbf{r}) \int_0^t F_n(\tau) \sin[a\omega_n(t - \tau)] d\tau +$$

$$+ \sum_n R_n(\mathbf{r}) \left[ \varphi_n \cos(a\omega_n t) + \frac{\psi_n}{a\omega_n} \sin(a\omega_n t) \right].$$

Отриманий нами розв'язок неоднорідного хвильового рівняння складається з двох доданків. Перший з них описує вплив на рух системи зовнішньої сили, що ініціює вимушені коливання у системі. Другий доданок описує власні коливання системи, що виникли виключно під дією початкових умов. Навіть за надзвичайно малих втрат системою енергії за скінчений проміжок часу власні коливання згасатимуть і лишаться лише вимушені коливання. При використанні перетворення Фур'є ми можемо проаналізувати саме останній результат.

Проілюструємо наведений вище алгоритм на детальному розв'язанні наступної задачі

**Задача 7.** Розв'яжемо межову задачу для одновимірного хвильового рівняння

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2} &= a^2 \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2} + f(x,t), \\ 0 < x < l, \quad 0 < t < \infty, \\ U(x,0) &= \varphi(x), \quad \frac{\partial U(x,0)}{\partial t} = \psi(x), \\ U(0,t) &= U(l,t) = 0. \end{aligned}$$

**Розв'язання.** Розв'язання цієї задачі базується на попередньому розв'язанні межової задачі для однорідного хвильового рівняння. Причину цього є те, що розв'язок задачі для неоднорідного рівняння шукається у вигляді ряду Фур'є. В якості повної ортогональної системи функцій беруться відповідні власні функції. Такий вибір повної ортогональної системи функцій гарантує автоматичне виконання межових умов задачі. Тоді

$$U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(t) \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right),$$

де коефіцієнти Фур'є функції  $U_n(t)$  невідомі. Тим самим ми приводимо задачу відшукування функції  $U(x,t)$  до відшукування її коефіцієнтів Фур'є. Останні мають задовольняти рівнянню і лише початковій умові Розвинемо в аналогічні ряди Фур'є і інші функції задачі, а саме:

$$\begin{aligned} f(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right), \\ \varphi(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right), \\ \psi(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right). \end{aligned}$$

Оскільки функції  $f(x,t)$  і  $\varphi(x)$  відомі, то їх коефіцієнти Фур'є можна знайти безпосередньо

$$\begin{aligned} f_n(t) &= \frac{2}{l} \int_0^l f(x,t) \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) dx, \\ \varphi_n &= \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) dx, \\ \psi_n &= \frac{2}{l} \int_0^l \psi(x) \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) dx. \end{aligned}$$

Підкладемо наведені розвинення у рівняння і початкову умову. Оскільки

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} U(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^2}{dt^2} U_n(t) \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} U(x, t) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \pi^2}{l^2} U_n(t) \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right),$$

то задача матимемо наступний вигляд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{d^2}{dt^2} U_n(t) + \frac{n^2 \pi^2 a^2}{l^2} U_n(t) - f_n(t) \right] \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) = 0,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} [U_n(0) - \varphi_n] \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) = 0,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} [U_{tn}(0) - \psi_n] \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) = 0.$$

Оскільки базисні функції лінійно незалежні, то їх лінійна комбінація дорівнює нулю лише у разі, якщо всі коефіцієнти цієї лінійної комбінації дорівнюють нулю. Ця умова дає нам нескінченну систему звичайних диференціальних рівнянь щодо коефіцієнтів Фур'є шуканої функції

$$\frac{d}{dt} U_n(t) + \frac{n^2 \pi^2 a^2}{l^2} U_n(t) = f_n(t),$$

$$U_n(0) = \varphi_n, \quad U_{tn}(0) = \psi_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Цю систему зручно розв'язувати за допомогою інтегрального перетворення Лапласа. Отже, припускаючи, що зображення за Лапласом невідомої функції існує

$$U_n(t) =: U_n(p),$$

за властивістю зображення похідної одержуємо

$$\frac{d^2}{dt^2} U_n(t) =: p^2 U_n(p) - p\varphi_n - \psi_n.$$

Відповідно,

$$f_n(t) =: f_n(p).$$

Система рівнянь тепер набуде вигляду

$$p^2 U_n(p) - p\varphi_n - \psi_n + \frac{n^2 \pi^2 a^2}{l^2} U_n(p) = f_n(p), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Її розв'язок має вигляд

$$U_n(p) = \frac{p\varphi_n}{p^2 + n^2 \pi^2 a^2 / l^2} + \frac{\psi_n}{p^2 + n^2 \pi^2 a^2 / l^2} + \frac{f_n(p)}{p + n^2 \pi^2 a^2 / l^2}.$$

Для знаходження оригіналу використаємо наступне табличне зображення

$$\sin(at) = \frac{a}{p^2 + a^2},$$

$$\cos(at) = \frac{p}{p^2 + a^2}$$

і властивість зображення згортки

$$\int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau = f_1(p) f_2(p).$$

У висліді

$$U_n(t) = \varphi_n \cos\left(\frac{n\pi a}{l}t\right) + \varphi_n \frac{l}{n\pi a} \sin\left(\frac{n\pi a}{l}t\right) + \frac{l}{n\pi a} \int_0^t \sin\left(\frac{n\pi a}{l}\tau\right) f_n(t-\tau) d\tau .$$

Шуканий розв'язок тепер буде таким

$$U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \varphi_n \cos\left(\frac{n\pi a}{l}t\right) + \frac{l}{n\pi a} \psi_n \cos\left(\frac{n\pi a}{l}t\right) \right] \sin\left(\frac{n^2\pi^2}{l^2}x\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{l}{n\pi a} \int_0^t \sin\left(\frac{n\pi a}{l}\tau\right) f_n(t-\tau) d\tau \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) .$$

Задача розв'язана до кінця. Перший доданок у правій частині описує хвильовий процес, зумовлений початковими умовами, другий - дією зовнішньої сили. Така структура розв'язку відповідає структурі загального розв'язку неоднорідного рівняння, який складається з загального розв'язку однорідного рівняння і частинного розв'язку неоднорідного рівняння. Другий доданок якраз і є частинним розв'язком неоднорідного рівняння. Якщо ж зовнішня сила дорівнює нулю, то ми маємо вже отриманий вище частинний розв'язок однорідного рівняння з відповідними межовими і початковою умовами. Подальша конкретизація розв'язку вимагає конкретизації початкових умов і зовнішньої сили.

#### **Межова задача для рівняння теплопровідності.**

Зазначену задачу можна записати так

$$\frac{\partial u(\mathbf{r},t)}{\partial t} = a^2 \Delta u(\mathbf{r},t) .$$

Межові умови, як і раніше, нехай будуть першого, другого або третього родів. Явно ми їх не розглядатимемо, оскільки нас цікавитиме лише часова залежність розв'язку. Початкова умова нехай буде наступною

$$u(\mathbf{r},0) = \varphi(\mathbf{r}) .$$

Таку умову доцільно використовувати тоді, коли момент спостереження за поведінкою системи не дуже віддалений від початку у ній теплового процесу. У цьому разі початкова умова суттєво впливає на процес. При такому підході ми можемо досліджувати процеси у системі ще до виходу їх у стаціонарний режим, якщо останній можливий.

Якщо коефіцієнти диференційного рівняння не залежать від часу, то ефективним методом розв'язку таких задач Коші є застосування інтегрального перетворення Лапласа. У разі рівняння теплопровідності ситуація саме така. Разом з тим, однорідне рівняння теплопровідності у висліді поділу змінних зразу зводиться до рівняння Гельмгольца. Саме у такій ситуації перетворення Лапласа неадекватне проблемі. Тому однорідне рівняння теплопровідності ми розв'яжемо методом поділу змінних, а вже до неоднорідного можна застосувати інтегральне перетворення Лапласа аналогічно тому, як вище було застосоване інтегральне перетворення Фур'є.

Шукатимемо частинні розв'язки допоміжної задачі (рівняння разом з межовими умовами) у вигляді наступного добутку

$$u(\mathbf{r},t) = R(\mathbf{r})T(t) .$$

Після підстановки його у рівняння отримаємо

$$\frac{1}{T(t)} \frac{1}{a^2} \frac{dT(t)}{dt} = \frac{1}{R(\mathbf{r})} \Delta R(\mathbf{r}) = -\omega^2 ,$$

де  $\omega^2$  - стала поділу. Остання подвійна рівність еквівалентна двом наступним диференційним рівнянням, одне з яких вже звичайне

$$\frac{dT(t)}{dt} + a^2 \omega^2 T(t) = 0 ,$$

$$\Delta R(\mathbf{r}) + \omega^2 R(\mathbf{r}) = 0 .$$

Друге рівняння є рівнянням Гельмгольца. Разом з межовими умовами першого воно утворює задачу Штурма-Ліувілля. Будемо вважати її власні функції  $R_n(\mathbf{r})$  і власні числа  $\omega_n$  відомими ( $\Delta R_n(\mathbf{r}) + \omega_n^2 R_n(\mathbf{r}) = 0$ ). Тоді шукані частинні розв'язки можна записати так

$$u_n(\mathbf{r}, t) = R_n(\mathbf{r}) T_n(t) .$$

Тут  $T_n(t)$  - загальний розв'язок першого рівняння системи

$$\frac{dT_n(t)}{dt} + a^2 \omega_n^2 T_n(t) = 0 .$$

Цей розв'язок має вигляд

$$T_n(t) = A_n \exp(-a^2 \omega_n^2 t) .$$

Загальний же розв'язок вихідного рівняння теплопровідності є сумою знайдених частинних розв'язків і може записуватись у вигляді

$$u(\mathbf{r}, t) = \sum_n A_n R_n(\mathbf{r}) \exp(-a^2 \omega_n^2 t) .$$

Звідси видно, що єдиним збуренням, що викликає тепловий процес у системі, є початкова умова. Процес є затухаючим, тобто температура тіла асимптотично прямує до температури навколишнього середовища.

Довільні сталі, що входять у загальний розв'язок, визначатимуться з початкової умови

$$\varphi(\mathbf{r}) = \sum_n A_n R_n(\mathbf{r}) .$$

Ця умова є рядом Фур'є за власними функціями задачі Штурма-Ліувілля для рівняння Гельмгольца. Отже, його коефіцієнти визначаються так

$$A_n = \frac{1}{\|R_n\|_V^2} \int_V \rho(\mathbf{r}) R_n(\mathbf{r}) \varphi(\mathbf{r}) d\mathbf{r} .$$

Таким чином, задача у загальному вигляді розв'язана до кінця. Так само як і разі хвильового рівняння використаємо останній результат для декількох простих випадків.

**Приклад 31.** Одновимірна однорідна задача теплопровідності з однорідними межовими умовами першого роду має розв'язок

$$U(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) \exp\left(-a^2 \frac{n^2 \pi^2}{l^2} t\right) ,$$

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) dx .$$

**Приклад 32.** Двовимірна однорідна задача теплопровідності з межовими умовами першого роду для прямокутника має розв'язок

$$u(x, y, t) = \sum_{n,m=1}^{\infty} A_{nm} \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{h} y\right) \exp\left[-a^2 \pi^2 \left(\frac{n^2}{l^2} + \frac{m^2}{h^2}\right) t\right] .$$

$$A_n = \frac{4}{lh} \int_0^l dx \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) \int_0^h \varphi(x, y) \sin\left(\frac{m\pi}{h} y\right) dy .$$



**Приклад 33.** Тривимірна однорідна задача теплопровідності з межовими умовами першого роду для паралелепіпеда має розв'язок:

$$u(x, y, z, t) = \sum_{n,m,k=1}^{\infty} A_{nmk} \sin\left(\frac{na}{l}x\right) \sin\left(\frac{ma}{h}y\right) \sin\left(\frac{ka}{s}z\right) \times \\ \times \exp\left[-a^2\pi^2\left(\frac{n^2}{l^2} + \frac{m^2}{h^2} + \frac{k^2}{s^2}\right)t\right], \\ A_{nmk} = \frac{8}{lhs} \int_0^l dx \sin\left(\frac{na}{l}x\right) \int_0^h dy \sin\left(\frac{ma}{h}y\right) \int_0^s \varphi(x, y, z) \sin\left(\frac{ka}{s}z\right) dz \dots$$

**Приклад 34.** Двовимірна однорідна задача теплопровідності з межовими умовами першого роду для круга має наступний розв'язок:

$$u(r, \varphi, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{nm} J_n\left(\frac{\mu_{nm}}{r_0}r\right) \exp(in\varphi) \exp\left(-a^2 \frac{\mu_{nm}^2}{r_0^2}t\right), \\ A_{nm} = \frac{2}{\pi r_0^2 [J_{n+1}(\mu_{nm})]^2} \times \\ \times \int_0^{2\pi} d\theta \exp(in\theta) \int_0^{r_0} \varphi(r, \varphi) J_n\left(\frac{\mu_{nm}}{r_0}r\right) r dr.$$

**Приклад 35.** Тривимірна однорідна задача теплопровідності з межовими умовами першого роду для кулі має наступний розв'язок:

$$u(r, \theta, \varphi, t) = \sum_{n,k=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n A_{nmk} j_n\left(\frac{\mu_{nk}}{r_0}r\right) Y_{nm}(\theta, \varphi) \exp\left(-a^2 \frac{\mu_{nk}^2}{r_0^2}t\right), \\ A_{nmk} = \frac{2}{r_0^2 [J_{n+3/2}(\mu_{nk})]^2} \times \\ \times \int d\Omega Y_{nm}(\theta, \varphi) \int_0^{r_0} \varphi(r, \theta, \varphi) J_{n+1/2}\left(\frac{\mu_{nk}}{r_0}r\right) r^{3/2} dr.$$

**Приклад 36.** Тривимірна однорідна задача теплопровідності з межовими умовами першого роду для циліндра має наступний вигляд:

$$u(r, \varphi, z, t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n,k=1}^{\infty} A_{nmk} J_m\left(\frac{\mu_{mk}}{r_0}r\right) \sin\left(\frac{n\pi}{h}z\right) \times \\ \times \exp(im\varphi) \exp\left[-a^2\left(\frac{n^2\pi^2}{h^2} + \frac{\mu_{mk}^2}{r_0^2}\right)t\right], \\ A_{nmk} = \frac{4}{\pi h r_0^2 [J_{m+1}(\mu_{mk})]^2} \times \\ \times \int_0^h dz \sin\left(\frac{n\pi}{h}z\right) \int_0^{2\pi} d\theta \cos(m\theta) \int_0^{r_0} \varphi(r, \varphi, z) J_m\left(\frac{\mu_{mk}}{r_0}r\right) r dr.$$

## 1.10. Задачі для самостійної роботи

### Варіант 1

1. Знайти зображення або оригінал за Лапласом

$$t^2 \exp(-t) \sin(t), \quad \frac{\exp(-t) \sin(t)}{t}, \quad \frac{p+1}{(p-1)(p^2+4p+5)}.$$

2. Знайти зображення за Фур'є

$$f(x) = \begin{cases} \exp(x), & x < 0, \\ 0, & x \geq 0. \end{cases}$$

3. Розв'язати задачу Коші для звичайного диференційного рівняння

$$y''(t) + y(t) = \exp(-t), \\ y(0) = 0, y'(0) = 1.$$

4. Розв'язати задачу Коші для системи звичайних диференційних рівнянь

$$\begin{cases} x'(t) + y(t) = 1, \\ y'(t) + x(t) = 0, \end{cases} \quad x(0) = 0, y(0) = 0.$$

5. Розв'язати диференційне рівняння у частинних похідних

$$\begin{aligned} \text{а) } u_{tt}(x,t) &= a^2 u_{xx}(x,t) + c^2 u(x,t), \quad 0 < x < \infty, t > 0, \\ u_x(0,t) &= v(t), u(x,0) = u_t(x,0) = 0. \\ \text{б) } u_{tt}(x,t) &= a^2 u_{xx}(x,t) + c^2 u(x,t), \quad -\infty < x < \infty, t > 0, \\ u(x,0) &= \varphi(x), u_t(x,0) = \psi(x). \end{aligned}$$

### Варіант 2

1. Знайти зображення або оригінал за Лапласом

$$t^2 \exp(t), \quad \frac{\exp(-t) \sinh(t)}{t}, \quad \frac{p-1}{(p+1)(p^2+p+1)}.$$

2. Знайти зображення за Фур'є

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \exp(-x), & x \geq 0. \end{cases}$$

3. Розв'язати задачу Коші для звичайного диференційного рівняння

$$y'''(t) + y(t) = \exp(-t), \\ y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = -1.$$

4. Розв'язати задачу Коші для системи звичайних диференційних рівнянь

$$\begin{cases} x'(t) - y(t) = 0, \\ y'(t) + x(t) = \exp(t), \\ x(0) = 0, y(0) = 0. \end{cases}$$

5. Розв'язати диференційне рівняння у частинних похідних

$$\begin{aligned} \text{а) } u_{tt}(x,t) &= a^2 u_{xx}(x,t) + c^2 u(x,t), \quad 0 < x < \infty, t > 0, \\ u(0,t) &= \mu(t), u(x,0) = u_t(x,0) = 0. \end{aligned}$$

$$\text{b) } u_{tt}(x,t) + a^2 u_{xx}(x,t) = 0, -\infty < x < \infty, t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), u_t(x,0) = \psi(x).$$

### Варіант 3

1. Знайти зображення або оригінал за Лапласом

$$t^2 \cosh(t), \quad \frac{\exp(-t) \cos(t)}{t}, \quad \frac{p}{(p^2 + 4p + 8)^2}.$$

2. Знайти зображення за Фур'є

$$f(x) = \exp(-|x|).$$

3. Розв'язати задачу Коші для звичайного диференційного рівняння

$$y''(t) + y(t) = 1 + \exp(t), \\ y(0) = 1, y'(0) = 0.$$

4. Розв'язати задачу Коші для системи звичайних диференційних рівнянь

$$\begin{cases} x'(t) + y(t) - x(t) = 1, \\ y'(t) + x(t) - y(t) = 0, \\ x(0) = 0, y(0) = 0. \end{cases}$$

5. Розв'язати диференційне рівняння у частинних похідних

$$\text{a) } u_t(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t), 0 < x < \infty, t > 0, \\ u_x(0,t) = 0, u(x,0) = f(x).$$

$$\text{b) } u_{tt}(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t) + f(x,t), -\infty < x < \infty, t > 0, \\ u(x,0) = 0, u_t(x,0) = 0.$$

### Варіант 4

1. Знайти зображення або оригінал за Лапласом

$$t^2 \sinh(t), \quad \frac{\exp(-t) \cosh(t)}{t}, \quad \frac{1}{p^2(p^2 + 1)^2}.$$

2. Знайти зображення за Фур'є

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

3. Розв'язати задачу Коші для звичайного диференційного рівняння

$$y''(t) + y(t) = \sin(at), \\ y(0) = -1, y'(0) = 1.$$

4. Розв'язати задачу Коші для системи звичайних диференційних рівнянь

$$\begin{cases} x'(t) - y(t) = \cos(t), \\ y'(t) + x(t) = 0, \\ x(0) = 0, y(0) = 0. \end{cases}$$

5. Розв'язати диференційне рівняння у частинних похідних

$$\text{a) } u_t(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t), 0 < x < \infty, t > 0, \\ u(0,t) = 0, u(x,0) = f(x).$$

$$\text{b) } u_{tt}(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t) + f(x,t), \quad -\infty < x < \infty, t > 0, \\ u(x,0) = 0, u_t(x,0) = 0.$$

### Варіант 5

1. Знайти зображення або оригінал за Лапласом

$$t^2 \cos(t), \quad \frac{\sin^2(t)}{t}, \quad \frac{p+1}{(p^2+2p+3)p}.$$

2. Знайти зображення за Фур'є

$$f(x) = \begin{cases} x, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

3. Розв'язати задачу Коші для звичайного диференційного рівняння

$$y'''(t) + y'(t) = \cos(at), \\ y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = 0.$$

4. Розв'язати задачу Коші для системи звичайних диференційних рівнянь

$$\begin{cases} x'(t) - y(t) = 0, \\ y'(t) + x(t) = \sin(t), \\ x(0) = 0, y(0) = 0. \end{cases}$$

5. Розв'язати диференційне рівняння у частинних похідних

$$\text{a) } u_{tt}(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t), \quad 0 < x < \infty, t > 0, \\ u(0,t) = 0, u(x,0) = f(x), u_t(x,0) = \psi(x).$$

$$\text{b) } u_{tt}(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t), \quad -\infty < x < \infty, t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), u_t(x,0) = 0.$$

### Варіант 6

1. Знайти зображення або оригінал за Лапласом

$$t^2 \sin(t), \quad \frac{\cos^2(t)}{t}, \quad \frac{1}{(p^3+1)p}.$$

2. Знайти зображення за Фур'є

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -1 \leq x < 0, \\ x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

3. Розв'язати задачу Коші для звичайного диференційного рівняння

$$y''(t) + 2y'(t) = t + 1, \\ y(0) = 0, y'(0) = 1.$$

4. Розв'язати задачу Коші для системи звичайних диференційних рівнянь

$$\begin{cases} x'(t) + y(t) + z(t) = 1, \\ y'(t) - x(t) + y(t) - z(t) = 0, \\ z'(t) - x(t) - y(t) - z(t) = 0, \\ x(0) = 0, y(0) = 0, z(0) = 0. \end{cases}$$

5. Розв'язати диференціальне рівняння у частинних похідних

$$\text{a) } u_{tt}(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t), 0 < x < \infty, t > 0,$$

$$u_x(0,t) = 0, u(x,0) = \varphi(x), u_t(x,0) = \psi(x).$$

$$\text{b) } u_{tt}(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t) + \exp(-|x|t), -\infty < x < \infty, t > 0,$$

$$u(x,0) = u_t(x,0) = 0.$$

### Варіант 7

1. Знайти зображення або оригінал за Лапласом

$$t \cosh(t), \quad \frac{\cosh^2(t)}{t}, \quad \frac{p}{(p-1)^2(p^2+4p+5)}.$$

2. Знайти зображення за Фур'є

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -1 \leq x < 0, \\ 1, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

3. Розв'язати задачу Коші для звичайного диференціального рівняння

$$y''(t) - y(t) = t \exp(-t),$$

$$y(0) = 0, y'(0) = 1.$$

4. Розв'язати задачу Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} x'(t) + y(t) + z(t) = 1, \\ y'(t) + x(t) + z(t) = 0, \\ z'(t) + x(t) + y(t) = 0, \end{cases}$$

$$x(0) = 0, y(0) = 0, z(0) = 0.$$

5. Розв'язати диференціальне рівняння у частинних похідних

$$\text{a) } u_t(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t) + c^2 u(x,t), 0 < x < \infty, t > 0,$$

$$u(0,t) = \mu(t), u(x,0) = 0.$$

$$\text{b) } u_t(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t), -\infty < x < \infty, t > 0,$$

$$u(x,0) = f(x).$$

### Варіант 8

1. Знайти зображення або оригінал за Лапласом

$$t \sinh(t), \quad \frac{\sinh^2(t)}{t}, \quad \frac{p}{(p^2+1)(p^2-4)}.$$

2. Знайти зображення за Фур'є

$$f(x) = \begin{cases} \exp(x), & x < 0, \\ 1, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

3. Розв'язати задачу Коші для звичайного диференціального рівняння

$$y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = t \cos(t),$$

$$y(0) = 1, y'(0) = -1.$$

4. Розв'язати задачу Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} x'(t) + y(t) + z(t) = \exp(t), \\ y'(t) + x(t) + z(t) = 0, \\ z'(t) + x(t) + y(t) = 0, \end{cases}$$

$$x(0) = 0, y(0) = 0, z(0) = 0.$$

5. Розв'язати диференціальне рівняння у частинних похідних

a)  $u_t(x, t) = a^2 u_{xx}(x, t) + c^2 u(x, t), 0 < x < \infty, t > 0$  ,  
 $u_x(0, t) = v(t), u(x, 0) = 0$  .

b)  $u_t(x, t) = a^2 u_{xx}(x, t) + c^2 u(x, t), -\infty < x < \infty, t > 0$  ,  
 $u(x, 0) = f(x)$  .

### Варіант 9

1. Знайти зображення або оригінал за Лапласом

$$t \cos(t), \quad \frac{1 - \cos(t)}{t \exp(t)}, \quad \frac{p-1}{(p+1)^2(p^2 - 2p + 5)}.$$

2. Знайти зображення за Фур'є

$$f(x) = \begin{cases} \cos(x), & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

3. Розв'язати задачу Коші для звичайного диференціального рівняння

$$y''(t) + ay(t) = t + \exp(-t),$$

$$y(0) = 0, y'(0) = 1.$$

4. Розв'язати задачу Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} x'(t) + y(t) + z(t) = 0, \\ y'(t) + x(t) + z(t) = \sin(t), \\ z'(t) + x(t) + y(t) = 0, \end{cases}$$

$$x(0) = 0, y(0) = 0, z(0) = 0.$$

5. Розв'язати диференціальне рівняння у частинних похідних

a)  $u_{tt}(x, t) = a^2 u_{xx}(x, t), 0 < x < \infty, t > 0$  ,  
 $u(0, t) = \mu(t), u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0$  .

b)  $u_{tt}(x, t) = a^2 u_{xx}(x, t) + f(x, t), -\infty < x < \infty, t > 0$  ,  
 $u(x, 0) = 0$  .

### Варіант 10

1. Знайти зображення або оригінал за Лапласом

$$t \sin(t), \quad \frac{1 - \exp(t)}{t \exp(t)}, \quad \frac{p}{(p-1)(p^2 - 2p + 2)^2}.$$

2. Знайти зображення за Фур'є

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x), & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

3. Розв'язати задачу Коші для звичайного диференціального рівняння

$$y''''(t) + y''(t) = \exp(-t),$$

$$y(0) = 0, y'(0) = 0, y''(0) = 0, y'''(0) = 1.$$

4. Розв'язати задачу Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} x'(t) + y(t) + z(t) = 0, \\ y'(t) + x(t) + z(t) = 0, \\ z'(t) + x(t) + y(t) = \cos(t), \end{cases}$$

$$x(0) = 0, y(0) = 0, z(0) = 0.$$

5. Розв'язати диференціальне рівняння у частинних похідних

а)  $u_{tt}(x, t) = a^2 u_{xx}(x, t), 0 < x < \infty, t > 0,$   
 $u_x(0, t) = v(t), u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0.$

б)  $u_t(x, t) = a^2 u_{xx}(x, t) + c^2 u(x, t), -\infty < x < \infty, t > 0,$   
 $u(x, 0) = \varphi(x).$

## Глава 2

### Різні задачі із фізичним змістом

#### 2.1. Динаміка матеріальної точки

Розглянемо декілька задач, пов'язаних з рухом матеріальної точки, для розв'язання яких зручно застосувати інтегральні перетворення Фур'є та Лапласа.

**Рух тіла, кинутого під кутом до горизонту.** За допомогою інтегрального перетворення Лапласа розв'яжемо наступну систему рівнянь:

$$\begin{aligned}m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + q \frac{dx(t)}{dt} &= 0 \\m \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + q \frac{dy(t)}{dt} &= -mg\end{aligned}$$

з початковими умовами:

$$x(0) = 0, \quad y(0) = 0, \quad \frac{dx(0)}{dt} = V \cos(\alpha), \quad \frac{dy(0)}{dt} = V \sin(\alpha).$$

Ця система рівнянь описує рух тіла, кинутого під кутом  $\alpha$  до горизонту з початковою швидкістю  $V$ . Траєкторія руху тіла, для простоти, починається у початку координат, вісь  $x$  якої паралельна земній поверхні, вісь  $y$  направлена вгору. Крім сили земного тяжіння  $\mathbf{F}_g = (0, -mg)$ , на тіло діє сила опору повітря, пропорційна швидкості з коефіцієнтом опору  $q$ ,  $\mathbf{F}_r = (-qx', -qy')$ . Проектуючи рівняння Н'ютона на Декартові осі координат, ми і отримаємо наведену систему рівнянь. Фактично, ми отримали систему двох незалежних рівнянь

Припустимо, що зображення невідомих функцій існують:

$$\begin{aligned}x(t) &=: X(p), \\y(t) &=: Y(p).\end{aligned}$$

Тоді за властивістю зображення похідної матимемо:

$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt} &=: pX(p) - x(0) = pX(p), \\ \frac{dy(t)}{dt} &=: pY(p) - y(0) = pY(p), \\ \frac{d^2 x(t)}{dt^2} &=: p^2 X(p) - px(0) - \frac{dx(0)}{dt} = p^2 X(p) - V \cos(\alpha), \\ \frac{d^2 y(t)}{dt^2} &=: p^2 Y(p) - py(0) - \frac{dy(0)}{dt} = p^2 Y(p) - V \sin(\alpha).\end{aligned}$$

Зображенням вільного члена рівняння буде таким

$$mg =: mg / p.$$

Підклавши знайдені зображення у вихідну систему рівнянь отримаємо:

$$\begin{aligned}m[p^2 X(p) - V \cos(\alpha)] + qpX(p) &= 0, \\ m[p^2 Y(p) - V \sin(\alpha)] + qpY(p) &= -\frac{mg}{p}.\end{aligned}$$

Ці рівняння мають очевидні розв'язки:



$$X(p) = \frac{V \cos(\alpha)}{p \left( p + \frac{q}{m} \right)},$$

$$Y(p) = \frac{V \sin(\alpha)}{p \left( p + \frac{q}{m} \right)} - \frac{g}{p^2 \left( p + \frac{q}{m} \right)}.$$

Для знаходження оригіналу  $x(t)$  достатньо використати таку властивість перетворення Лапласа як зображення інтеграла

$$\int_0^t f(\tau) d\tau =: \frac{F(p)}{p}$$

і табличне зображення показникової функції

$$\exp\left(-\frac{q}{m}t\right) =: \left(p + \frac{q}{m}\right)^{-1}.$$

У висліді

$$x(t) = V \cos(\alpha) \int_0^t \exp\left(-\frac{q}{m}\tau\right) d\tau.$$

Після обчислення інтегралу маємо

$$x(t) = \frac{mV \cos(\alpha)}{q} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{q}{m}t\right) \right].$$

Якщо опір прямує до нуля ( $q \rightarrow 0$ ), то рух тіла вздовж осі  $x$  буде рівномірним з сталою швидкістю  $V \cos(\alpha)$ , тобто

$$x(t) = V \cos(\alpha) t.$$

Таким є рух і у випадку малого опору для малих часів  $t$ . Для великих часів слід враховувати наступні члени розвинення експоненти

$$x(t) = V \cos(\alpha) t - \frac{qV \cos(\alpha)}{m} t^2 + \dots$$

При знаходженні другого зображення доцільно також використати таку властивість як зображення згортки

$$\int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau =: F_1(p) F_2(p),$$

де

$$F_1(p) = \frac{1}{p^2} =: t,$$

$$F_2(p) = \left(p + \frac{q}{m}\right)^{-1} =: \exp\left(-\frac{q}{m}t\right).$$

У висліді

$$y(t) = \frac{mV \sin(\alpha)}{q} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{q}{m}t\right) \right] - g \int_0^t \exp\left(-\frac{q}{m}\tau\right) (t-\tau) d\tau$$

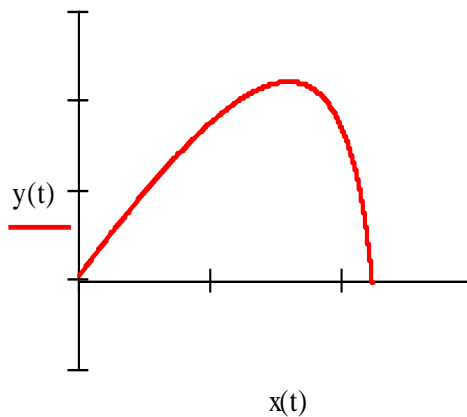
Після обчислення інтегралу

$$y(t) = \frac{mV \sin(\alpha)}{q} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{q}{m}t\right) \right] + \frac{mgt}{q} \left[ \exp\left(-\frac{q}{m}t\right) - 1 \right] - \frac{mg}{q} \left[ \left(t + \frac{m}{q}\right) \exp\left(-\frac{q}{m}t\right) - \frac{m}{q} \right].$$

Якщо сила опору прямує до нуля, то

$$y(t) = V \sin(\alpha)t - \frac{gt^2}{2}$$

і тіло рухається до досягнення найвищої точки рівносповільнено, а після цього - рівноприскорено. У загальному випадку траєкторію тіла можна побачити на наступному малюнку



**Малюнок 8.**

Легко бачити, що розглянуте рівняння руху несумісне з умовою існування Фур'є-образу невідомої функції.

Очевидно, що у кожному конкретному випадку умова існування Фур'є-образу невідомої функції має конкретний фізичний зміст. Виходячи з фізичного змісту задачі завжди можна спрогнозувати можливість задоволення такої умови. У задачах, пов'язаних з динамікою матеріальної точки, необхідною умовою існування Фур'є-образу невідомої функції-координати точки є просторова обмеженість (фінітність) її руху. Дійсно, легко переконатись, що Фур'є-образ функції, що описує рівномірний і прямолінійний рух матеріальної точки, не існує, у той час як Фур'є-образ функції, що описує коливальний рух точки щодо положення рівноваги існує, хоча і у класі узагальнених функцій.

**Вимушені коливання кульки на пружині.** Оскільки у цій задачі рух носить фінітний характер, то ми розглянемо її розв'язання як за допомогою перетворення Лапласа, так і перетворення Фур'є.

**Перетворення Лапласа.** За допомогою інтегрального перетворення Лапласа потрібно розв'язати рівняння

$$m \frac{d^2x(t)}{dt^2} + q \frac{dx(t)}{dt} + kx(t) = f \sin(\omega t)$$

з початковими умовами:

$$x(0) = 0, \quad \frac{dx(0)}{dt} = V.$$

Це рівняння описує, наприклад, рух кульки масою  $m$ , закріпленої до пружинки з коефіцієнтом жорсткості  $k$ , у середовищі з силою опору пропорційною швидкості кульки з коефіцієнтом пропорційності  $q$ , під дією зовнішньої гармонійної сили з частотою  $\Omega$  і амплітудою  $f$ . Причиною руху кульки є як зовнішня сила, так і її початкова швидкість  $V$ .

Припустимо, що зображення за Лапласом невідомої функції існує

$$x(t) =: X(p).$$

Тоді за властивістю зображення похідної знайдемо наступні зображення:

$$\frac{dx(t)}{dt} =: pX(p) - x(0) = pX(p),$$

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} =: p^2X(p) - px(0) - \frac{dx(0)}{dt} = p^2X(p) - V.$$

Далі випишемо зображення вільного члену

$$\sin(\omega t) =: \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}.$$

Після підстановки знайдених зображень у рівняння, воно набере вигляду

$$mp^2X(p) - V + qpX(p) + kX(p) = f \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}.$$

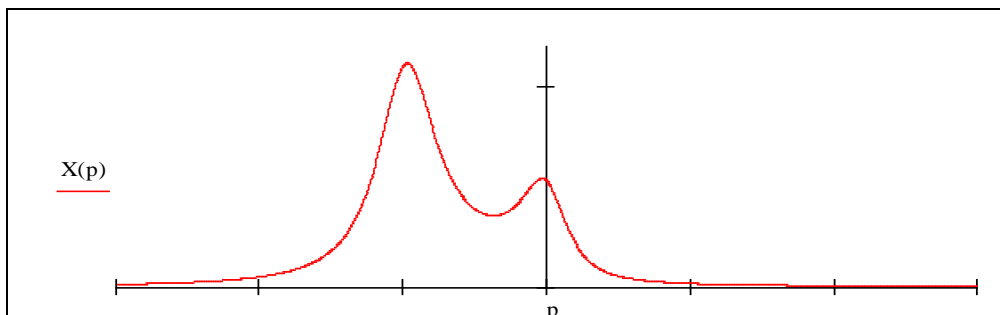
Розв'язок цього рівняння має вигляд

$$X(p) = \frac{V}{mp^2 + qp + k} + f \frac{\omega}{(p^2 + \omega^2)(mp^2 + qp + k)}.$$

Вираз спрощується виділенням повного квадрату у знаменниках обох доданків

$$X(p) = \frac{V}{m\Omega} \frac{\Omega}{(p + \tau^{-1})^2 + \Omega^2} + \frac{f}{m\Omega} \frac{\omega}{(p^2 + \omega^2)} \frac{\Omega}{(p + \tau^{-1})^2 + \Omega^2}.$$

Ця функція для дійсних значень аргументу має наступний графік з двома максимумами. Один з них на частоті, що відповідає оберненому часу релаксації системи, інший - на частоті, що відповідає оберненому часу релаксації (затуханню) зовнішнього збурення. Оскільки останній час релаксації вважається нескінченно великим, то другий максимум спостерігається на нульовій частоті.



Малюнок 9

Тут введені наступні позначення для частота власних коливань

$$\Omega = \sqrt{k/m - q^2/4m^2},$$

та для часу релаксації системи, тобто часу, за який, при відсутності зовнішньої сили амплітуда внутрішніх коливання зменшується в  $e$  разів

$$\tau^{-1} = q/2m .$$

Шуканий оригінал можна записати у вигляді

$$x(t) = \frac{V}{m\Omega} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \sin(\Omega t) + \frac{f}{m\Omega_0} \int_0^t \exp\left(-\frac{\xi}{\tau}\right) \sin(\Omega \xi) \sin[\omega(t-\xi)] d\xi .$$

Для знаходження оригіналу ми, крім теореми загаяння, використали властивість під назвою зображення згортки.

Знайдений розв'язок рівняння складається з двох доданків. Перший з них описує власні коливання з частотою  $\Omega$ . При наявності сили опору, вони носять затухаючий характер і практично зникають за час релаксації  $\tau$ . Більш детально цей внесок проаналізовано у попередній задачі. Другий доданок описує вимушені коливання кульки, тобто її коливання під дією зовнішньої сили. Він описує також і результат інтерференції зовнішніх і внутрішніх коливань. Розглянемо його детальніше. Для спрощення використаємо формулу Ейлера

$$\sin(\alpha) = \frac{1}{2i} [\exp(i\alpha) - \exp(-i\alpha)] ,$$

Тоді

$$\begin{aligned} & \int_0^t \exp\left(-\frac{t'}{\tau}\right) \sin(\Omega t') \sin[\omega(t-t')] dt' = \\ & = -\frac{1}{4} \exp(i\omega t) \int_0^t \exp\left[\left(-\frac{1}{\tau} + i(\Omega - \omega)\right)t'\right] dt' - \\ & - \frac{1}{4} \exp(-i\omega t) \int_0^t \exp\left[\left(-\frac{1}{\tau} - i(\Omega - \omega)\right)t'\right] dt' + \\ & + \frac{1}{4} \exp(i\omega t) \int_0^t \exp\left[\left(-\frac{1}{\tau} - i(\Omega + \omega)\right)t'\right] dt' + \\ & + \frac{1}{4} \exp(-i\omega t) \int_0^t \exp\left[\left(-\frac{1}{\tau} + i(\Omega + \omega)\right)t'\right] dt' . \end{aligned}$$

Результат обчислення цього інтегралу наступний

$$\begin{aligned} & \int_0^t \exp\left(-\frac{t'}{\tau}\right) \sin(\Omega t') \sin[\omega(t-t')] dt' = \\ & = \frac{1}{2} \left[ \frac{\Omega + \omega}{(\Omega + \omega)^2 + \tau^{-2}} - \frac{\Omega - \omega}{(\Omega - \omega)^2 + \tau^{-2}} \right] \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \sin(\Omega t) - \\ & - \frac{1}{2} \left[ \frac{\tau^{-1}}{(\Omega + \omega)^2 + \tau^{-2}} - \frac{\tau^{-1}}{(\Omega - \omega)^2 + \tau^{-2}} \right] \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \cos(\Omega t) - \\ & - \frac{1}{2} \left[ \frac{\Omega + \omega}{(\Omega + \omega)^2 + \tau^{-2}} - \frac{\Omega - \omega}{(\Omega - \omega)^2 + \tau^{-2}} \right] \sin(\omega t) + \\ & + \frac{1}{2} \left[ \frac{\tau^{-1}}{(\Omega + \omega)^2 + \tau^{-2}} - \frac{\tau^{-1}}{(\Omega - \omega)^2 + \tau^{-2}} \right] \cos(\omega t) . \end{aligned}$$

Остаточний результат матиме вигляд (дивися також наступний малюнок)

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) .$$

Тут доданок

$$x_1(t) = \frac{V}{m\Omega} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \sin(\Omega t)$$

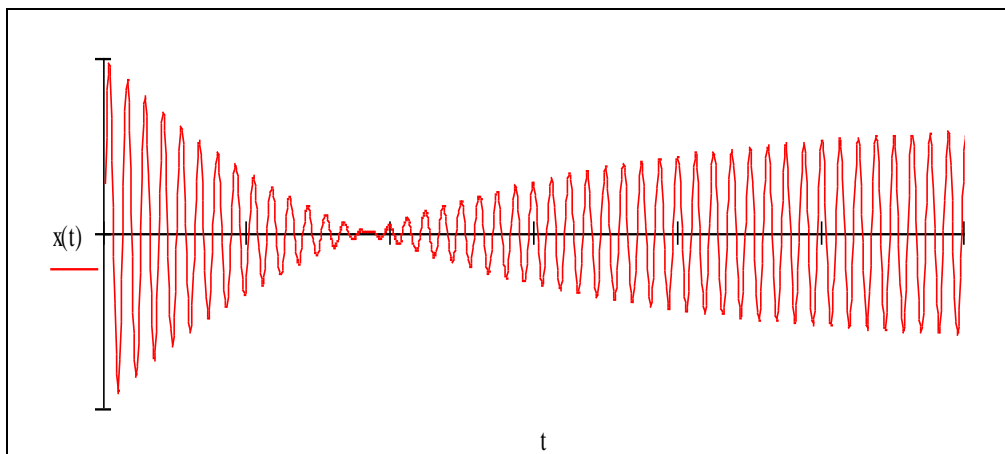
описує коливання, зумовлені початковими умовами (власні коливання). Їх амплітуда, частота і час затухання повністю визначаються властивостями системи. Вони у загальному випадку є затухаючими. Наступний доданок

$$x_2(t) = \frac{f}{2m\Omega} \left[ \frac{\Omega + \omega}{(\Omega + \omega)^2 + \tau^{-2}} - \frac{\Omega - \omega}{(\Omega - \omega)^2 + \tau^{-2}} \right] \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \sin(\Omega t) - \frac{f}{2m\Omega} \left[ \frac{\tau^{-1}}{(\Omega + \omega)^2 + \tau^{-2}} - \frac{\tau^{-1}}{(\Omega - \omega)^2 + \tau^{-2}} \right] \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \cos(\Omega t)$$

описує інтерференцію власних і вимушених коливань. Їх амплітуда визначається вже не тільки властивостями системи, але характеристиками зовнішнього збурення. Частота збігається з частотою власних коливань. Вони також є затухаючими. Останній доданок

$$x_3(t) = -\frac{f}{2m\Omega} \left[ \frac{\Omega + \omega}{(\Omega + \omega)^2 + \tau^{-2}} - \frac{\Omega - \omega}{(\Omega - \omega)^2 + \tau^{-2}} \right] \sin(\omega t) + \left. + \frac{f}{2m\Omega} \left[ \frac{\tau^{-1}}{(\Omega + \omega)^2 + \tau^{-2}} - \frac{\tau^{-1}}{(\Omega - \omega)^2 + \tau^{-2}} \right] \cos(\omega t) \right\}$$

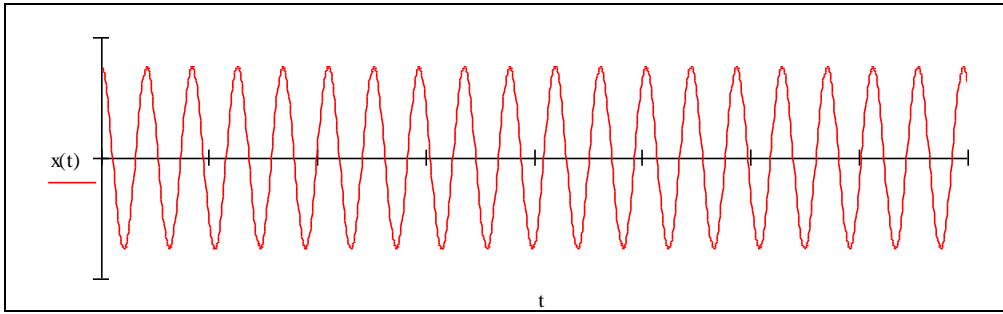
описує вимушені коливання під дією зовнішнього збурення. Їх амплітуда визначається характеристиками зовнішнього збурення і параметрами системи, Частота цих коливань збігаються з частотою зовнішнього збурення. Ці коливання є незатухаючими, якщо незатухаючим є зовнішнє збурення.



**Малюнок 10.**

На малюнку видно поступове затухання власних коливань та наростання і стабілізація вимушених коливань системи. Розглянемо детальніше другий доданок, зумовлений зовнішньою силою. За час релаксації всі коливання, пов'язані із внутрішніми властивостями системи, затухають і залишаються лише вимушені коливання. Тоді (див. наступний малюнок)

$$x(t) = \frac{f}{m\Omega} \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \frac{\Omega + \omega}{(\Omega + \omega)^2 + \tau^{-2}} - \frac{\Omega - \omega}{(\Omega - \omega)^2 + \tau^{-2}} \right] \sin(\omega t) + \frac{1}{2} \left[ \frac{\tau^{-1}}{(\Omega + \omega)^2 + \tau^{-2}} - \frac{\tau^{-1}}{(\Omega - \omega)^2 + \tau^{-2}} \right] \cos(\omega t) \right\} .$$

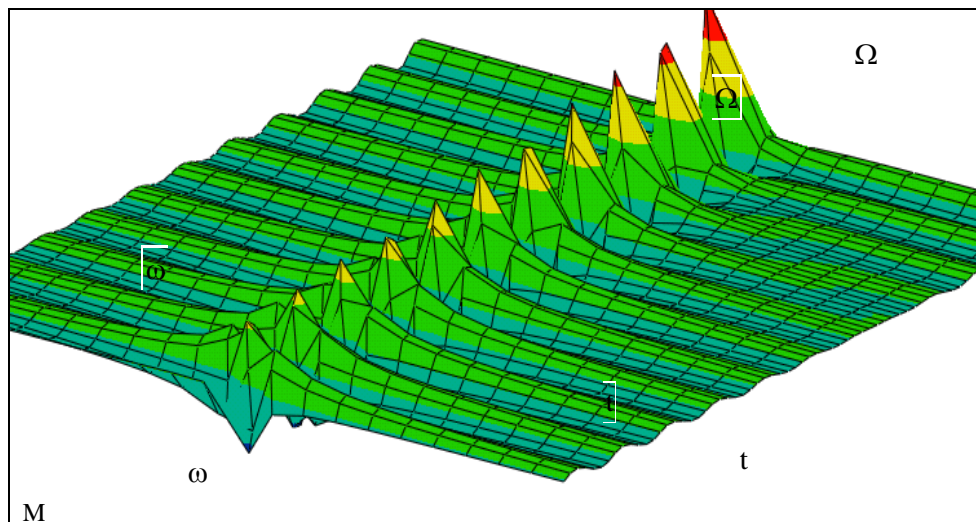


Малюнок 11

Якщо сила опору зникає, тобто  $\tau^{-1}$  прямує до нуля, то характер коливань стає максимально простим. У цьому разі

$$x(t) = \frac{f}{m} \frac{1}{\Omega^2 - \omega^2} \sin(\omega t) .$$

Нарешті, коли частота зовнішньої сили збігається з частотою власних коливань, наступає явище резонансу, коли амплітуда коливань прямує до максимально можливого значення (при відсутності сили опору - до безмежності). Явище резонансу добре видно на наступному малюнку



Малюнок 12

Цікавим є випадок, слабо затухаючих власних коливань. Тоді

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) ,$$

$$x_1(t) = \frac{V}{m\Omega} \sin(\Omega t) ,$$

$$x_2(t) = -\frac{f}{m\Omega} \frac{\omega}{(\Omega^2 - \omega^2)^2} \sin(\Omega t) - \frac{\pi f}{2m\Omega} [\delta(\Omega + \omega) - \delta(\Omega - \omega)] \cos(\Omega t) ,$$

$$x_3(t) = \frac{f}{m\Omega} \frac{\omega}{(\Omega^2 - \omega^2)^2} \sin(\omega t) + \frac{\pi f}{2m\Omega} [\delta(\Omega + \omega) - \delta(\Omega - \omega)] \cos(\omega t) .$$

Тут використане одне з означень дельта-функції Дірака. Доданки, що містять дельта-функції, відмінні від нуля лише під час резонансу, тобто коли частота зовнішнього збурення співпадає з частотою власних коливань.

$$\delta(\Omega + \omega) = \lim_{\tau^{-1} \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \frac{\tau^{-1}}{(\Omega + \omega)^2 + \tau^{-2}}.$$

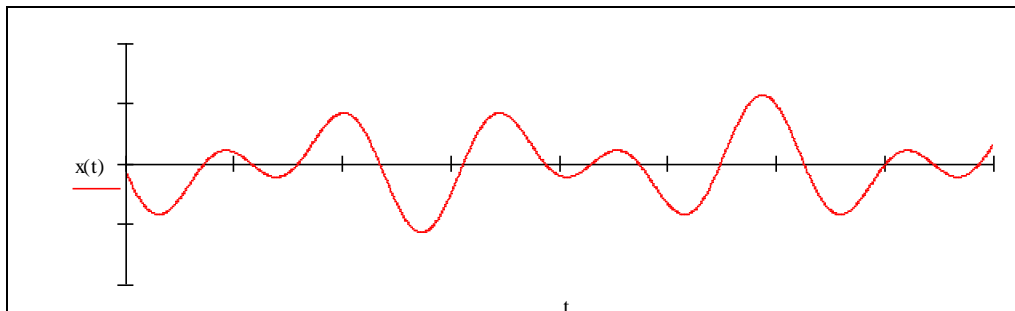
Використовуючи наступні тригонометричні формули:

$$\begin{aligned} \sin(\omega t) - \sin(\Omega t) &= 2 \sin\left(\frac{\omega - \Omega}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega + \Omega}{2} t\right), \\ \cos(\omega t) - \cos(\Omega t) &= -2 \sin\left(\frac{\omega - \Omega}{2} t\right) \sin\left(\frac{\omega + \Omega}{2} t\right), \end{aligned}$$

останній результат можна записати так

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{V}{m\Omega} \sin(\Omega t) + \frac{2f}{m\Omega(\Omega^2 - \omega^2)^2} \sin\left(\frac{\omega - \Omega}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega + \Omega}{2} t\right) - \\ &- \frac{\pi f}{m\Omega} [\delta(\Omega + \omega) - \delta(\Omega - \omega)] \sin\left(\frac{\omega - \Omega}{2} t\right) \sin\left(\frac{\omega + \Omega}{2} t\right). \end{aligned}$$

Ці коливання мають три характерні частоти: частоту власних коливань  $\Omega$ , та комбіновані частоти  $(\omega - \Omega)/2$ ,  $(\omega + \Omega)/2$ . Характер цих коливань добре видно, якщо амплітуда зовнішнього збурення  $f$  набагато перевищує амплітуду початкового збурення  $V$  (дивися наступний малюнок)



**Малюнок 13**

**Перетворення Фур'є.** Оскільки рух системи фінітний, то для розв'язання задачі можна використати і інтегральне перетворення Фур'є. Вважатимемо виконаними умови його існування. Отже зображення за Фур'є невідомої функції існує

$$x(t) := X(\alpha).$$

Тоді, за властивістю - зображення похідної знайдемо зображення похідних:

$$\frac{dx(t)}{dt} := -i\alpha X(\alpha),$$

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} := -\alpha^2 X(\alpha).$$

Далі випишемо зображення вільного члену:

$$\sin(\omega t) := i\pi [\delta(\omega - \alpha) - \delta(\omega + \alpha)].$$

Після підстановки знайдених зображень у рівняння, воно набере вигляду

$$-m\alpha^2 X(\alpha) - iq\alpha X(\alpha) + kX(\alpha) = i\pi f [\delta(\omega - \alpha) - \delta(\omega + \alpha)].$$

Розв'язок цього рівняння має вигляд

$$X(\alpha) = -\frac{i\pi f [\delta(\omega - \alpha) - \delta(\omega + \alpha)]}{m\alpha^2 + iq\alpha - k}.$$

Оригінал, що відповідає знайденому Фур'є образу має вигляд

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-iat) X(\alpha) d\alpha.$$

Наявність дельта-функцій дозволяє легко обчислити інтеграл, отже

$$x(t) = \frac{1}{2i} f \left[ \frac{\exp(i\omega t)}{m\omega^2 - iq\omega - k} - \frac{\exp(-i\omega t)}{m\omega^2 + iq\omega - k} \right].$$

Останній результат можна представити так

$$x(t) = -f \frac{q\omega}{(m\omega^2 - k)^2 + q^2\omega^2} \cos(\omega t) - f \frac{m\omega^2 - k}{(m\omega^2 - k)^2 + q^2\omega^2} \sin(\omega t).$$

Ввівши позначення

$$\omega_0 = \sqrt{k/m}, \quad \tau_0^{-1} = \frac{q\omega}{m},$$

наш результат можна записати у вигляді

$$x(t) = \frac{f}{m} \frac{\tau_0^{-1}}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \tau_0^{-2}} \cos(\omega t) + \frac{f}{m} \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \tau_0^{-2}} \sin(\omega t).$$

Якщо використати очевидний зв'язок:

$$\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{4\tau_0^2}}, \quad \tau^{-1} = \frac{1}{2\tau_0},$$

то тотожність результатів, отриманих за інтегральних перетворень Фур'є і Лапласа стає очевидною. При цьому, для порівняння слід брати результат, отриманий на основі використання перетворення Лапласа, на тій фазі, на якій стають несуттєвими початкові умови. Тобто, з моменту початку руху має пройти достатньо великий проміжок часу.

### Зв'язані коливання двох кульок

**Перетворення Лапласа.** За допомогою інтегрального перетворення Лапласа розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 x_1(t)}{dt^2} &= -\frac{mg}{l} x_1(t) + k[x_2(t) - x_1(t)] \\ m \frac{d^2 x_2(t)}{dt^2} &= -\frac{mg}{l} x_2(t) + k[x_1(t) - x_2(t)]. \end{aligned}$$

Ця система рівнянь описує коливання двох, з'єднаних пружинкою кульок, що мають однакову масу  $m$  і підвішені на нитках довжиною  $l$ . Коливання кульок вважатимемо малими. Тоді їх рух буде, практично, одновимірним і може описуватись координатою  $x_1(t)$  - відхиленням від положення рівноваги першої кульки і координатою  $x_2(t)$  - відхиленням від положення рівноваги другої кульки. Крім того,  $k$  - коефіцієнт жорсткості пружини,  $g$  - прискорення вільного падіння. В якості початкових умов для наведених рівнянь Н'ютона, використаємо наступні:

$$x_1(0) = x_2(0) = 0,$$

$$\frac{dx_1(0)}{dt} = V,$$

$$\frac{dx_2(0)}{dt} = 0.$$



Вони означають, що у початковий момент часу кульки знаходились у положеннях рівноваги. Система була приведена у рух наданням першій кульці початкової швидкості.

Виконаємо перетворення Лапласа. вихідної системи рівнянь. Для початку припустимо існування зображення за Лапласом невідомих функцій:

$$x_1(t) =: X_1(p),$$

$$x_2(t) =: X_2(p)$$

Далі, використовуючи властивість зображення похідної, маємо:

$$\frac{d^2 x_1(t)}{dt^2} =: p^2 X_1(p) - V,$$

$$\frac{d^2 x_2(t)}{dt^2} =: p^2 X_2(p),$$

Система рівнянь набере тепер вигляду:

$$p^2 X_1(p) - V = -\frac{g}{l} X_1(p) + \frac{k}{m} [X_2(p) - X_1(p)],$$

$$p^2 X_2(p) = -\frac{g}{l} X_2(p) + \frac{k}{m} [X_1(p) - X_2(p)].$$

З другого рівняння системи маємо

$$X_2(p) = \frac{k/m}{p^2 + g/l + k/m} X_1(p).$$

Після підстановки цього співвідношення у перше рівняння матимемо

$$X_1(p) = V \frac{p^2 + g/l + k/m}{(p^2 + g/l + k/m)^2 - (k/m)^2}.$$

Відповідно,

$$X_2(p) = V \frac{k/m}{(p^2 + g/l + k/m)^2 - (k/m)^2}.$$

Кожне із знайдених зображень можна представити простіше, що дозволить виконати зворотнє перетворення Лапласа без використання формули Мелліна, а саме:

$$X_1(p) = \frac{V}{2} \left( \frac{1}{p^2 + g/l} + \frac{1}{p^2 + g/l + 2k/m} \right),$$

$$X_2(p) = \frac{V}{2} \left( \frac{1}{p^2 + g/l} - \frac{1}{p^2 + g/l + 2k/m} \right).$$

Для спрощення останніх двох виразів, введемо наступні позначення:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}},$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{k}{m}},$$

що мають розмірність частоти. У висліді

$$X_1(p) = \frac{V}{2\omega_1} \frac{\omega_1}{p^2 + \omega_1^2} + \frac{V}{2\omega_2} \frac{\omega_2}{p^2 + \omega_2^2},$$

$$X_2(p) = \frac{V}{2\omega_1} \frac{\omega_1}{p^2 + \omega_1^2} - \frac{V}{2\omega_2} \frac{\omega_2}{p^2 + \omega_2^2}.$$

Використовуючи табличне зображення

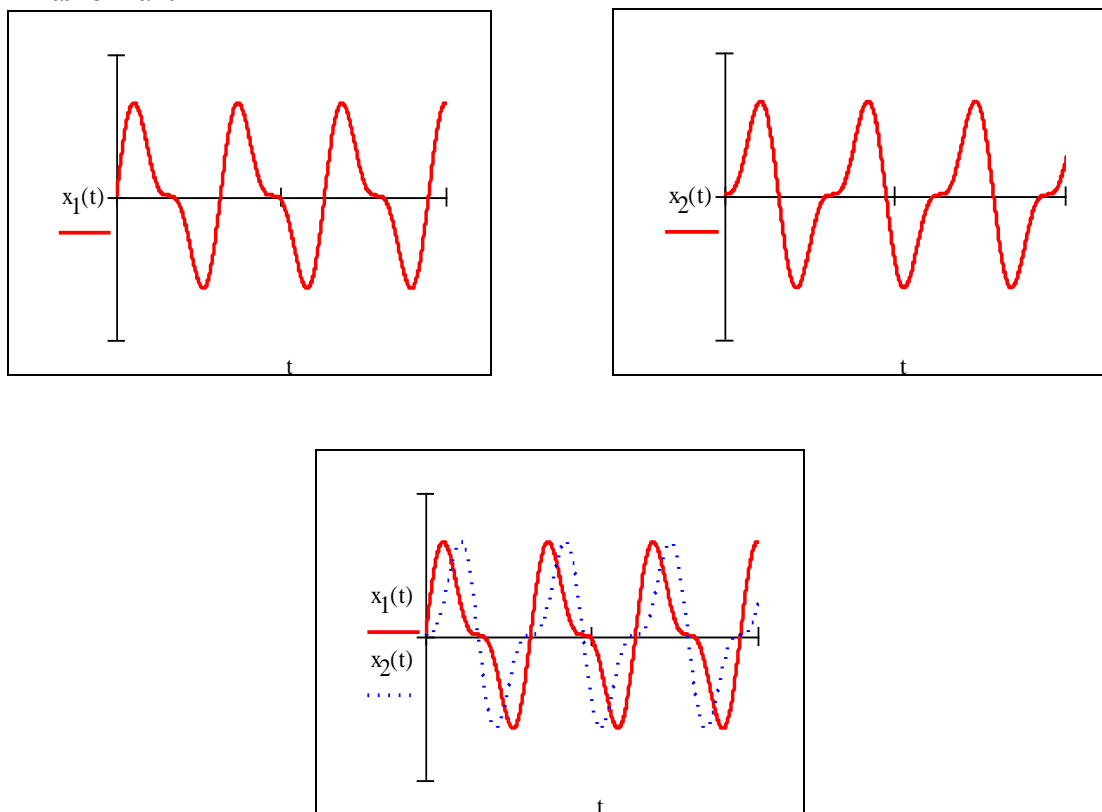
$$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2} =: \sin(\omega t) ,$$

для оригіналів матимемо:

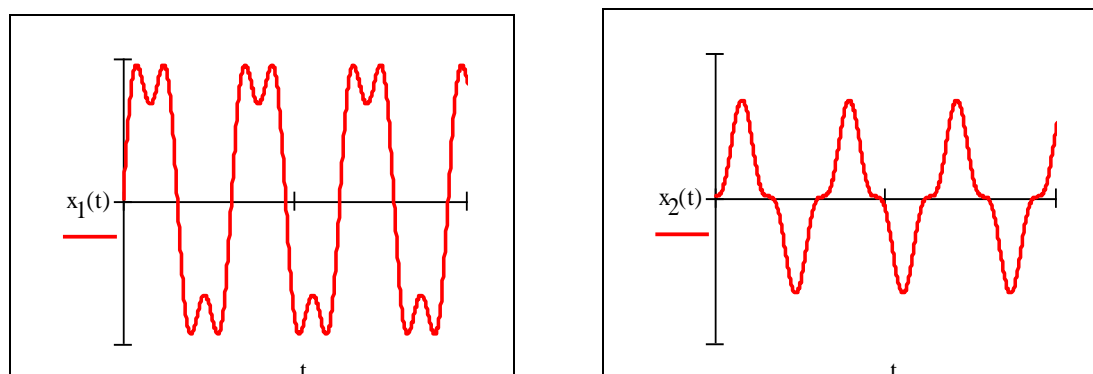
$$x_1(t) = \frac{V}{2\omega_1} \sin(\omega_1 t) + \frac{V}{2\omega_2} \sin(\omega_2 t) ,$$

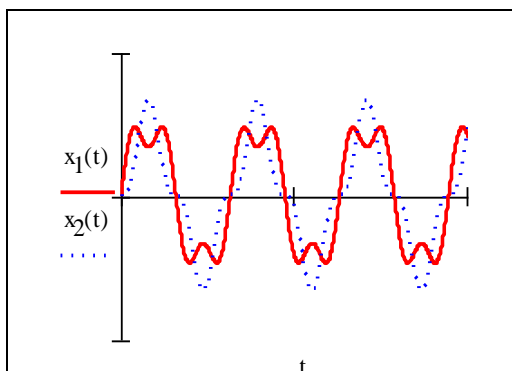
$$x_2(t) = \frac{V}{2\omega_1} \sin(\omega_1 t) - \frac{V}{2\omega_2} \sin(\omega_2 t) .$$

З отриманого результату видно, що рух кожної кульки можна розглядати як суперпозицію двох гармонійних коливань з різними амплітудами і частотами. Графіки цих функцій наведені на наступних малюнках:



**Малюнок 14.**  $\omega_1 = 1, \omega_2 = 2$





Малюнок 15.  $\omega_1 = 1, \omega_2 = 3$

Результатам можна надати і іншу форму, спочатку додавши отримані рівняння, а потім від першого віднявши друге:

$$\begin{aligned} \frac{V}{\omega_1} \sin(\omega_1 t) &= x_1(t) + x_2(t) , \\ \frac{V}{\omega_2} \sin(\omega_2 t) &= x_1(t) - x_2(t) . \end{aligned}$$

Звідки видно, що кожне з гармонійних коливань можна розглядати як колективний ефект, пов'язаний з рухом обох кульок.

**Перетворення Фур'є.** Розв'яжемо тепер попередню задачу за допомогою інтегрального перетворення Фур'є, оскільки рух кульок носить фінітний характер. Припустимо, що зображення за Фур'є невідомих функції існують:

$$\begin{aligned} x_1(t) &:= X_1(\omega) , \\ x_2(t) &:= X_2(\omega) . \end{aligned}$$

Далі, використовуючи властивість зображення похідної, маємо:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_1(t)}{dt^2} &:= -\omega^2 X_1(\omega) , \\ \frac{d^2 x_2(t)}{dt^2} &:= -\omega^2 X_2(\omega) . \end{aligned}$$

Система рівнянь набере тепер вигляду:

$$-\omega^2 X_1(\omega) = -\frac{g}{l} X_1(\omega) + \frac{k}{m} [X_2(\omega) - X_1(\omega)] ,$$

$$-\omega^2 X_2(\omega) = -\frac{g}{l} X_2(\omega) + \frac{k}{m} [X_1(\omega) - X_2(\omega)] ,$$

або

$$\begin{aligned} \left( \frac{g}{l} + \frac{k}{m} - \omega^2 \right) X_1(\omega) - \frac{k}{m} X_2(\omega) &= 0 , \\ \frac{k}{m} X_1(\omega) - \left( \frac{g}{l} + \frac{k}{m} - \omega^2 \right) X_2(\omega) &= 0 . \end{aligned}$$

Ця лінійна однорідна алгебраїчна система рівнянь має ненульовий розв'язок лише у разі, якщо її визначник дорівнює нулю, отже:

$$\begin{vmatrix} \frac{g}{l} + \frac{k}{m} - \omega^2 & -\frac{k}{m} \\ \frac{k}{m} & -\frac{g}{l} - \frac{k}{m} + \omega^2 \end{vmatrix} = 0 ,$$

або

$$\left( \frac{g}{l} + 2\frac{k}{m} - \omega^2 \right) \left( \frac{g}{l} - \omega^2 \right) = 0 .$$

Розв'язки цього характеристичного рівняння мають вигляд:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}} , \quad \omega_2 = -\sqrt{\frac{g}{l}} , \quad \omega_3 = \sqrt{\frac{g}{l} + 2\frac{k}{m}} , \quad \omega_4 = -\sqrt{\frac{g}{l} + 2\frac{k}{m}} .$$

У висліді ми отримали, що у системі можуть спостерігатись два коливальних процеси з частотами  $\omega_1, \omega_3$ . Від'ємні корені характеристичного рівняння не мають безпосереднього фізичного сенсу. Отже, вихідна система має чотири лінійно-незалежні розв'язки, визначені з точністю до довільного сталого множника:

$$\begin{aligned} e_1(t) &= \exp(i\omega_1 t) , \\ e_2(t) &= \exp(-i\omega_2 t) , \\ e_3(t) &= \exp(i\omega_3 t) , \\ e_4(t) &= \exp(-i\omega_4 t) . \end{aligned}$$

Відповідно, загальні розв'язки можна записати так

$$\begin{aligned} x_1(t) &= A_1 e_1(t) + B_1 e_2(t) + C_1 e_3(t) + D_1 e_4(t) , \\ x_2(t) &= A_2 e_1(t) + B_2 e_2(t) + C_2 e_3(t) + D_2 e_4(t) , \end{aligned}$$

де  $A_1, B_1, C_1, D_1, A_2, B_2, C_2, D_2$  - довільні сталі.

Детальнішої відповіді у разі використання інтегрального перетворення Фур'є отримати не можна, оскільки умова його застосування не містить більш детальної інформації про рух кульок.

## Одновимірна кристалічна гратка

**Одновимірна гратка з одним атомом у комірниці.** У даному разі застосування інтегрального перетворення Лапласа можливе але фізично недоцільне. Нескінченна кількості матеріальних точок вимагає і нескінченної кількості початкових умов. Крім технічної складності реалізації такої програми важливим є і те, що задання зазначених початкових умов можлива лише формально але не фактично. Тому постановка у даному випадку задачі Коші фактично фізично беззмістовна. Використання ж інтегрального перетворення Фур'є навпаки абсолютно виправдане, оскільки позбавляє нас від необхідності слідкування за рухом кожної окремої матеріальної точки. Його реалізація практично простіша і фізично виправданіша, оскільки дає відповідь на головні питання щодо властивостей системи. Отже, за допомогою інтегрального перетворення Фур'є, розв'яжемо наступну нескінченну систему звичайних диференційних рівнянь

$$M \frac{d^2 u_n(t)}{dt^2} = -k[2u_n(t) - u_{n-1}(t) - u_{n+1}(t)] , \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Ця система рівнянь описує коливання ланцюжка однакових атомів, розташованих еквідистантно.  $M$  - маса атома,  $u_n(t)$  - зміщення  $n$ -го атома з положення рівноваги, яке має координату  $x_n$ ,  $k$  - силова стала гратки. Замість нескінченної кількості функцій  $u_n(t)$  зручно розглянути одну функцію  $U(x_n, t)$  таку, що  $U(x_n, t) = u_n(t)$ . Ця функція для кожного положення рівноваги  $x_n$  визна-

чає зміщення з цього положення у момент часу  $t$  відповідного атома. Таку функцію доцільно вводити лише при умові нескінченій кількості атомів. У цьому разі дискретну змінну  $x_n$  можна розглядати як неперервну, маючи на увазі можливість наступного виконання за цією змінною перетворення Фур'є. Рівняння щодо введеної функції матиме вигляд

$$M \frac{d^2 U(x_n, t)}{dt^2} = -k[2U(x_n, t) - U(x_{n-1}, t) - U(x_{n+1}, t)] , \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Отже, нехай перетворення Фур'є нової невідомої функції за обома аргументами має вигляд  $U(x_n, t) := U(q, \omega)$ .

Після виконання перетворення Фур'є лише за часом рівняння буде таким

$$M \omega^2 U(x_n, \omega) = k[2U(x_n, \omega) - U(x_{n-1}, \omega) - U(x_{n+1}, \omega)] .$$

Це рівняння не містить жодних додаткових припущень порівняно з вихідним. Якщо тепер замість функції  $U(x_n, t)$  підкласти її вираз через Фур'є-образ за координатою, то рівняння матиме вигляд

$$M \omega^2 \int_{-\infty}^{\infty} \exp(iqx_n) U(q, \omega) dq = k \left\{ 2 \int_{-\infty}^{\infty} \exp(iqx_n) U(q, \omega) dq - \int_{-\infty}^{\infty} \exp(iqx_{n-1}) U(q, \omega) dq - \int_{-\infty}^{\infty} \exp(iqx_{n+1}) U(q, \omega) dq \right\} .$$

На відміну від вихідного, це рівняння вимагає певного математичного обґрунтування у викладеному вище сенсі.

У висліді застосування перетворення Фур'є відбулось певне спрощення системи рівнянь, але виключно за часовим аргументом. Фур'є - перетворення за координатами матиме позитивні наслідки лише у разі, якщо вдасться всі інтеграли, що залишились у рівнянні, звести до одного з них. Лише тоді ми зможемо замінити знаходження нескінченної кількості відомих функцій, у даному разі інтегралів, знаходженням лише однієї функції  $U(q, \omega)$ . Така можливість існує лише у випадку кристалічної ґратки і зумовлена тим, що для задання координати довільного положення рівноваги досить задати положення рівноваги першого атома, та знати номер того атома, положення рівноваги якого нас цікавить, тобто

$$x_n = x_0 + na ,$$

де  $a$  - відстань між сусідніми атомами, так звана стала ґратки. Завдяки цій обставині, система рівнянь набере вигляду

$$M \omega^2 \int_{-\infty}^{\infty} \exp(iqx_n) U(q, \omega) dq = k \left\{ 2 \int_{-\infty}^{\infty} \exp(iqx_n) U(q, \omega) dq - \int_{-\infty}^{\infty} \exp(iqx_n) \exp(-iqa) U(q, \omega) dq - \int_{-\infty}^{\infty} \exp(iqx_n) \exp(iqa) U(q, \omega) dq \right\}$$

або

$$M \omega^2 U(q, \omega) = k[2 - \exp(-iqa) - \exp(iqa)] U(q, \omega) .$$

Використовуючи формули Ейлера, цей результат можна записати так

$$[\omega^2 - 2\omega_0^2(1 - \cos(qa))] U(q, \omega) = 0 ,$$

або

$$[\omega - 2\omega_0 \sin(qa/2)][\omega + 2\omega_0 \sin(qa/2)]U(q, \omega) = 0$$

де частота власних коливань атомів ґратки

$$\omega_0 = \sqrt{k/M}.$$

Іншими словами, це частота, з якою коливався б кожний окремих атом ґратки, якби всі інші атоми були нерухомі. Таким чином, нам вдалось звести нескінчену систему звичайних диференціальних рівнянь до одного лінійного однорідного алгебраїчного рівняння. Умовою існування його ненульового розв'язку є рівність нулю коефіцієнту перед невідомою функцією, тобто наступна рівність

$$\omega = \pm 2\omega_0 \sin(qa/2).$$

Фізичний зміст мають, зрозуміло, лише додатні значення частоти. Ми отримали неперервну функцію  $\omega = \omega(q)$ , що є наслідком використання інтегрального перетворення Фур'є за координатою. У разі ланцюга скінченної довжини цей набір значень частоти був би дискретним. Можна довести, що у межі, коли довжина ланцюга прямує до нескінченості, обидва результати збігаються.

Цей результат є надзвичайно цікавим. Як уже зазначалось вище, кожний атом характеризується однакою для всіх атомів частотою власних коливань. Об'єднання нескінченної кількості атомів у ланцюг приводить до того, що нескінченна кількість однакових атомів може коливатись у колективному режимі з нескінченною але зліченою кількістю частот, що визначаються останнім співвідношенням (законом дисперсії). Тобто по ланцюжку можуть бігти хвилі і  $q$  є їх хвильовий вектор. Для малих значень хвильового вектору закон дисперсії має особливо простий вигляд

$$\omega = cq.$$

Він відповідає розповсюдженню по ланцюжку звукових хвиль з швидкістю

$$c = a\omega_0.$$

Розв'язок рівняння руху можна представити у вигляді

$$U(q, \omega) = A(q) \delta[\omega^2 - 2\omega_0^2(1 - \cos(qa))],$$

Тут  $A(q)$  - довільна функція, що забезпечує існування відповідних інтегралів, з точністю до цієї функції і може бути знайденим розв'язком однорідного рівняння,  $\delta(x)$  - дельта-функція Дірака. Однією з основних її властивостей, що забезпечує саме наведену структуру розв'язку, є наступна

$$x\delta(x) = 0.$$

Саме розв'язок, пропорційний дельта-функції і забезпечує ненульове але скінченне значення оригіналу при виконанні оберненого перетворення Фур'є. Виконуючи це перетворення, отримуємо розв'язок задачі

$$U(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-i(qx - \omega t)] U(q, \omega) dq,$$

або

$$U(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} A(q) \exp[-i(qx - \omega t)] \delta[\omega^2 - 2\omega_0^2(1 - \cos(qa))] dq.$$

Сталий множник перед інтегралом, що входять в обернене перетворення Фур'є, ми, для простоти, включили у довільну функцію  $A(q)$ .

Використовуючи властивість дельта-функції

$$\delta(x^2 - a^2) = \frac{1}{2a} [\delta(x - a) + \delta(x + a)],$$

в інтегралі можна зменшити кратність інтегрування і отримати результат

$$U(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A(q) \cos[2\omega_0 \sin(qa/2)t]}{2\omega_0 \sin(qa/2)} \exp(-iqx) dq .$$

Закон руху  $n$ -го атома можна отримати, поклавши тут  $x = x_n$ , тобто  $u_n(t) = U(x_n, t)$ .

Детальнішої інформації щодо розв'язку рівняння руху метод інтегрального перетворення Фур'є не дає через обмеженість вихідної інформації.

**Одновимірна ґратка з двома атомами у комірці.** Результати попередньої задачі можна легко узагальнити на випадок двох атомів в елементарній комірці. Всі міркування, викладені вище мають місце і тут, тому відразу запишемо відповідну систему рівнянь

$$M_1 \frac{\partial^2 U_1(x_n, t)}{\partial t^2} = -k [2U_1(x_n, t) - U_2(x_{n-1}, t) - U_2(x_{n+1}, t)],$$

$$M_2 \frac{\partial^2 U_2(x_n, t)}{\partial t^2} = -k [2U_2(x_n, t) - U_1(x_{n-1}, t) - U_1(x_{n+1}, t)].$$

Тут  $n, m = 0, 1, 2, \dots$ . Ця система рівнянь описує коливання ланцюжка атомів двох типів, що чергуються між собою. Атоми кожного гатунку розташовані на однаковій відстані один від одного. Нехай для атомів обох гатунків це буде одна і та сама відстань  $a$ ,  $U_1(x_n, t)$  - зміщення  $n$ -го атома першого гатунку з положення рівноваги, що має координату  $x_n$ ,  $U_2(x_m, t)$  - зміщення  $m$ -го атома другого гатунку з положення рівноваги, що має координату  $x_m$ ,  $k$  - силова стала ґратки.

Застосуємо перетворення Фур'є до невідомих функцій за обома аргументами:

$$U_1(x_n, t) := U_1(q, \omega),$$

$$U_2(x_n, t) := U_2(q, \omega).$$

Після підстановки цього виразу у систему рівнянь, вона набере вигляду:

$$M_1 \omega^2 \int_{-\infty}^{\infty} \exp(iqx_n) U_1(q, \omega) dq = k \left\{ 2 \int_{-\infty}^{\infty} \exp(iqx_n) U_1(q, \omega) dq - \int_{-\infty}^{\infty} \exp(iqx_{n-1}) U_2(q, \omega) dq - \int_{-\infty}^{\infty} \exp(iqx_{n+1}) U_2(q, \omega) dq \right\},$$

$$M_2 \omega^2 \int_{-\infty}^{\infty} \exp(iqx_n) U_2(q, \omega) dq = k \left\{ 2 \int_{-\infty}^{\infty} \exp(iqx_n) U_2(q, \omega) dq - \int_{-\infty}^{\infty} \exp(iqx_{n-1}) U_1(q, \omega) dq - \int_{-\infty}^{\infty} \exp(iqx_{n+1}) U_1(q, \omega) dq \right\}.$$

У висліді відбулось певне спрощення системи рівнянь але виключно за часовим аргументом. Фур'є-перетворення за координатами може мати сенс лише у разі, коли вдасться всі інтеграли, що залишились у кожному рівнянні, звести до одного з них. Лише тоді ми зможемо замінити знаходження нескінченної кількості невідомих функцій, знаходженням двох невідомих функцій  $U_1(q, \omega)$  та  $U_2(q, \omega)$ . Така можливість існує і зумовлена тією обставиною, що для задання координати довільного положення рівноваги достатньо задати положення рівноваги першого атома, та знати номер того атома, положення рівноваги якого нас цікавить, тобто

$$x_n = x_0 + na .$$

Завдяки цій обставині і відповідно до результатів попередньої задачі, система рівнянь набере вигляду:

$$M_1 \omega^2 U_1(q, \omega) = 2k U_1(q, \omega) - k [\exp(-iqa) + \exp(iqa)] U_2(q, \omega),$$

$$M_2 \omega^2 U_2(q, \omega) = 2k U_2(q, \omega) - k[\exp(-iqa) + \exp(iqa)] U_1(q, \omega)$$

або

$$(\omega^2 - 2\omega_1^2) U_1(q, \omega) + 2\omega_1^2 \cos(qa) U_2(q, \omega) = 0,$$

$$2\omega_2^2 \cos(qa) U_1(q, \omega) + (\omega^2 - 2\omega_2^2) U_2(q, \omega) = 0,$$

де частоти власних коливань атомів кожного гатунку визначається так

$$\omega_1 = \sqrt{k/M_1}, \quad \omega_2 = \sqrt{k/M_2}.$$

Отже, нам вдалось звести нескінчену систему звичайних диференціальних рівнянь до двох лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь. Умовою існування їх ненульового розв'язку є наступна рівність

$$\begin{vmatrix} \omega^2 - 2\omega_1^2 & 2\omega_1^2 \cos(qa) \\ 2\omega_2^2 \cos(qa) & \omega^2 - 2\omega_2^2 \end{vmatrix} = 0$$

або

$$\omega^4 - 2(\omega_1^2 + \omega_2^2)\omega^2 + 4\omega_1^2\omega_2^2 \sin^2(qa) = 0.$$

Це рівняння має наступні корені:

$$\Omega_1 = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \sqrt{(\omega_1^2 + \omega_2^2)^2 - 4\omega_1^2\omega_2^2 \sin^2(qa)}},$$

$$\Omega_2 = -\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \sqrt{(\omega_1^2 + \omega_2^2)^2 - 4\omega_1^2\omega_2^2 \sin^2(qa)}},$$

$$\Omega_3 = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 - \sqrt{(\omega_1^2 + \omega_2^2)^2 - 4\omega_1^2\omega_2^2 \sin^2(qa)}},$$

$$\Omega_4 = -\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 - \sqrt{(\omega_1^2 + \omega_2^2)^2 - 4\omega_1^2\omega_2^2 \sin^2(qa)}}.$$

Фізичний зміст мають, зрозуміло, лише додатні значення частоти, а саме  $\Omega_1, \Omega_3$ . На відміну від ланцюга, що складався з атомів одного гатунку, і мав одну гілку колективних коливань, для малих значень хвильового вектора - звукових, ланцюг з атомів двох гатунків має дві гілки коливань, що принципово відрізняються для малих значень хвильового вектора. Дійсно, у цьому разі:

$$\Omega_1 = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2},$$

$$\Omega_3 = cq$$

Другий тип коливань такий же як і у випадку ланцюга з однакових атомів, тобто це колективні коливання, коли сусідні атоми рухаються майже в одній фазі. Це аналог звукових коливань, для яких характерна лінійна залежність частоти від хвильового вектора, де

$$c = \frac{\sqrt{2}\omega_1\omega_2 a}{\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}}$$

- швидкість звуку. Перший тип коливань - це коливання з фіксованою частотою. Вони називаються оптичними коливаннями. Для цих коливань характерно, що сусідні атоми ланцюга коливаються майже у протифазі.

## 2.2. Електрон в електромагнітному полі

**Розсіювання електромагнітних хвиль зв'язаним зарядом.** Розглянемо наступне рівняння

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}(t)}{dt^2} = \frac{2e^2}{3c^3} \frac{d^3 \mathbf{r}(t)}{dt^3} - k\mathbf{r} + e\mathbf{E} \sin(\omega t).$$

Це рівняння може описувати рух просторового осцилятора у зовнішньому електричному монохроматичному полі. Цим осцилятором може бути електрон в атомі при використанні класич-



ної моделі для останнього. Прискорення з яким рухається електрон, викликає випромінювання ним енергії. Перший доданок у правій частині якраз описує цей процес. Другий доданок представляє гармонійну силу, що утримує електрон в атомі. Остання характеризується коефіцієнтом  $k$ . Третій доданок - силу, з якою зовнішнє електричне поле діє на електрон. Тут  $e$  - заряд електрона,  $m$  - його маса,  $\mathbf{E}$  - напруженість електричного поля.

Оскільки рух системи фінітний, то для розв'язку задачі можна використати інтегральне перетворення Фур'є. Вважатимемо виконаними умови його існування.

Тут ми знову стикаємось з ситуацією, коли роль початкових умов несуттєва, через те що процес спостереження, як правило, значно перевищує час, який система зберігає пам'ять про початкові умови, хоча ця задача досить легко може бути розв'язана і як задача Коші.

Для розв'язання цього рівняння запишемо його у вигляді

$$-\gamma \frac{d^3 \mathbf{r}(t)}{dt^3} + \frac{d^2 \mathbf{r}(t)}{dt^2} + \omega_0^2 \mathbf{r}(t) = \frac{e}{m} \mathbf{E} \sin(\omega t).$$

Тут

$$\gamma = \frac{2e^2}{3mc^3}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

- коефіцієнт затухання та частота власних коливань електрона в атомі, відповідно. Наведене векторне рівняння доцільно розв'язувати безпосередньо, не переходячи до системи скалярних рівнянь.

Припустимо, що зображення за Фур'є невідомої функції існує

$$\mathbf{r}(t) := \mathbf{R}(\alpha).$$

Тоді, за властивістю зображення похідної знайдемо зображення похідних:

$$\frac{d^2 \mathbf{r}(t)}{dt^2} := -\alpha^2 \mathbf{R}(\alpha),$$

$$\frac{d^3 \mathbf{r}(t)}{dt^3} := i\alpha^3 \mathbf{R}(\alpha).$$

Далі випишемо зображення вільного члену

$$\sin(\omega t) := i\pi[\delta(\omega - \alpha) - \delta(\omega + \alpha)].$$

Після підстановки знайдених зображень у рівняння, воно набере вигляду

$$-i\gamma\alpha^3 \mathbf{R}(\alpha) - \alpha^2 \mathbf{R}(\alpha) + \omega_0^2 \mathbf{R}(\alpha) = i \frac{e}{m} \mathbf{E} \pi[\delta(\omega - \alpha) - \delta(\omega + \alpha)].$$

.Розв'язок цього рівняння має вигляд

$$\mathbf{R}(\alpha) = \frac{i \frac{e}{m} \pi \mathbf{E} [\delta(\omega - \alpha) - \delta(\omega + \alpha)]}{\omega_0^2 - \alpha^2 - i\gamma\alpha^3}.$$

Оригінал, що відповідає знайденому Фур'є-образу має вигляд

$$\mathbf{r}(t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\alpha t) \mathbf{R}(\alpha) d\alpha$$

Наявність дельта-функцій під знаком інтегралу дозволяє його легко обчислити, отже

$$\mathbf{r}(t) = \frac{1}{2i} \frac{e}{m} \mathbf{E} \left[ \frac{\exp(i\omega t)}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega^3} - \frac{\exp(-i\omega t)}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega^3} \right].$$

Останній результат можна представити так

$$\mathbf{r}(t) = \frac{e}{m} \mathbf{E} \frac{\tau^{-1}}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \tau^{-2}} \cos(\omega t) + \frac{e}{m} \mathbf{E} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \tau^{-2}} \sin(\omega t).$$

де введене наступне позначення для оберненого часу релаксації

$$\tau^{-1} = \gamma \omega^3.$$

Отриманий за допомогою інтегрального перетворення Фур'є розв'язок не містить довільних сталих оскільки вихідне рівняння було неоднорідними і містило всю необхідну інформацію про поведінку системи після того, як пам'ять про початкові умови зникла.

## Рух електрона в електричному і магнітному полях

**Електрон у постійному і однорідному магнітному полі.** У цій задачі можливий фінітний рух, у всякому разі за деякими координатами, тому розглянемо використання перетворень і Лапласа, і Фур'є.

**Перетворення Лапласа.** За допомогою інтегрального перетворення Лапласа розв'яжемо систему рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x(t)}{dt^2} &= \Omega \frac{dy(t)}{dt}, \\ \frac{d^2 y(t)}{dt^2} &= -\Omega \frac{dx(t)}{dt}, \\ \frac{d^2 z(t)}{dt^2} &= 0. \end{aligned}$$

з наступними початковими умовами:

$$\begin{aligned} x(0) &= y(0) = z(0) = 0, \\ \frac{dx(0)}{dt} &= V \cos(\alpha), \quad \frac{dy(0)}{dt} = V \cos(\beta), \quad \frac{dz(0)}{dt} = V \cos(\gamma). \end{aligned}$$

Наведена система рівнянь відповідає наступній фізичній задачі. Нехай електрон з швидкістю  $\mathbf{V}$  в момент часу  $t = 0$  влітає в однорідне постійне магнітне поле напруженості  $\mathbf{H}$ . Знайти траєкторію руху електрону.

Рух електрона у магнітному полі відбувається під дією сили Лоренца

$$\mathbf{F}(t) = \frac{e}{c} \left[ \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} \times \mathbf{H} \right] = \frac{e}{c} \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{dx(t)}{dt} & \frac{dy(t)}{dt} & \frac{dz(t)}{dt} \\ 0 & 0 & H \end{vmatrix}.$$

якщо вектор напруженості магнітного поля напрямлений вздовж осі  $z$ . Тут  $e$  - заряд електрона,  $c$  - швидкість світла,  $\mathbf{r}' = (x', y', z')$  - швидкість електрона,  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  - напрямні вектори Декартових осей координат. Рівняння руху електрона матиме вигляд

$$\mathbf{F}(t) = m \frac{d^2 \mathbf{r}(t)}{dt^2}.$$

Тут  $m$  - маса електрона,  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  - прискорення, з яким він рухається. Нехай вектор напруженості магнітного поля напрямлений вздовж осі  $z$ , а початковою точкою траєкторії є початок координат. При цьому початкова швидкість нехай становить з додатним напрямком осі  $x$  кут  $\alpha$ , осі  $y$  - кут  $\beta$ , осі  $z$  - кут  $\gamma$ . Початкові умови у цьому разі у векторній формі будуть наступними:

$$\mathbf{r}(0) = 0, \quad \frac{d\mathbf{r}(0)}{dt} = \mathbf{V}.$$

У скалярній формі вони матимуть вигляд:

$$x(0) = y(0) = z(0) = 0,$$

$$\frac{dx(0)}{dt} = V \cos(\alpha),$$

$$\frac{dy(0)}{dt} = V \cos(\beta),$$

$$\frac{dz(0)}{dt} = V \cos(\gamma).$$

Векторне рівняння руху еквівалентне наступним скалярним рівнянням:

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = \frac{e}{c} \frac{dy(t)}{dt} H,$$

$$m \frac{d^2 y(t)}{dt^2} = -\frac{e}{c} \frac{dx(t)}{dt} H,$$

$$m \frac{d^2 z(t)}{dt^2} = 0.$$

Останні рівняння зручно записати у вигляді:

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} = \Omega \frac{dy(t)}{dt},$$

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} = -\Omega \frac{dx(t)}{dt},$$

$$\frac{d^2 z(t)}{dt^2} = 0,$$

де ми ввели величину, що має розмірність частоти і називається циклотронною частотою

$$\Omega = \frac{|e| H}{mc}.$$

Виконаємо тепер перетворення Лапласа. Для початку припускаємо, що зображення за Лапласом невідомих функцій існують:

$$x(t) := X(p),$$

$$y(t) := Y(p),$$

$$z(t) := Z(p),$$

Далі, використовуючи властивість "зображення похідної", для похідних маємо:

$$\frac{dx(t)}{dt} := pX(p),$$

$$\frac{dy(t)}{dt} := pY(p),$$

$$\frac{dz(t)}{dt} := pZ(p),$$

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} := p^2X(p) - V \cos(\alpha),$$

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} := p^2Y(p) - V \cos(\beta),$$

$$\frac{d^2z(t)}{dt^2} := p^2Z(p) - V \cos(\gamma).$$

Система рівнянь набере тепер вигляду

$$p^2X(p) - V \cos(\alpha) = \Omega pY(p),$$

$$p^2Y(p) - V \cos(\beta) = -\Omega pX(p),$$

$$p^2Z(p) - V \cos(\gamma) = 0.$$

З останнього рівняння

$$Z(p) = V \cos(\gamma) / p^2.$$

Оригінал відповідної функції має вигляд

$$z(t) = V \cos(\gamma)t.$$

Останнє означає, що вздовж осі  $z$  електрон рухається рівномірно і прямолінійно. Тут ми використали табличне зображення

$$1/p^2 := t.$$

Розглянемо тепер друге рівняння системи. З нього

$$Y(p) = \frac{V \cos(\beta)}{p^2} - \Omega \frac{X(p)}{p^2}.$$

Після підстановки цього виразу у перше рівняння системи, останнє набере вигляду

$$p^2X(p) - V \cos(\alpha) = \Omega \frac{V \cos(\beta)}{p} - \Omega^2 X(p).$$

Звідки

$$X(p) = \frac{V \cos(\alpha)}{p^2 + \Omega^2} + \Omega \frac{V \cos(\beta)}{p(p^2 + \Omega^2)}.$$

Оригіналом для цього зображення буде функція

$$x(t) = \frac{V \cos(\alpha)}{\Omega} \sin(\Omega t) + V \cos(\beta) \int_0^t \sin(\Omega \tau) d\tau.$$

Тут ми використали табличне зображення:

$$\frac{\Omega}{p^2 + \Omega^2} := \sin(\Omega t),$$

і наступну властивість (зображення інтегралу) інтегрального перетворення Лапласа:

$$\frac{\Omega}{p(p^2 + \Omega^2)} := \int_0^t \sin(\Omega \tau) d\tau.$$

Остаточний результат можна записати у наступному вигляді

$$x(t) = \frac{V \cos(\alpha)}{\Omega} \sin(\Omega t) - \frac{V \cos(\beta)}{\Omega} [\cos(\Omega t) - 1].$$

Останнє з шуканих зображень матиме вигляд:

$$Y(p) = \frac{V \cos(\beta)}{p^2} - \Omega \frac{V \cos(\alpha)}{p(p^2 + \Omega^2)} - \Omega^2 \frac{V \cos(\beta)}{p^2(p^2 + \Omega^2)}.$$

Для оригіналу отримаємо

$$y(t) = \frac{V \cos(\alpha)}{\Omega} [\cos(\Omega t) - 1] + \frac{V \cos(\beta)}{\Omega} \sin(\Omega t).$$

Для знаходження проекції траєкторії руху електрона на площину  $xOy$  піднесемо до квадрату обидві частини рівнянь для координат  $x, y$  і додамо їх. У висліді маємо

$$\left(x - \frac{V \cos(\beta)}{\Omega}\right)^2 + \left(y + \frac{V \cos(\alpha)}{\Omega}\right)^2 = \frac{V^2}{\Omega^2}.$$

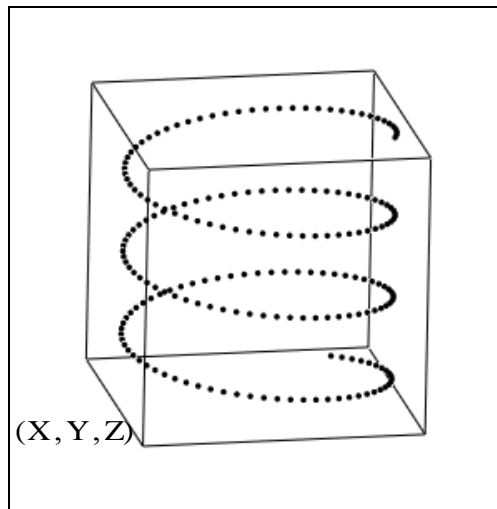
Таким чином, електрон рухається гвинтовою лінією вздовж осі  $z$ . Проекцією його траєкторії на площину  $xOy$  є коло з радіусом

$$R = \frac{V}{\Omega} = \frac{mcV}{|e|H},$$

та центром у точці з координатами

$$\left(\frac{V \cos(\beta)}{\Omega}, \frac{V \cos(\alpha)}{\Omega}\right).$$

З виразу для радіусу гвинтової лінії видно, що він тим більший, чим більшою є швидкість електрону і меншою напруженість магнітного поля. У тривимірному просторі траєкторія руху електрона має вигляд



Малюнок 16

**Перетворення Фур'є.** Попередню задачу розв'яжемо за допомогою інтегрального перетворення Фур'є. Очевидно, що інтегральне перетворення Фур'є за всіма трьома координатами не може бути застосованим. Разом з тим, його можна використати за координатами  $x$  і  $y$ , за якими рух є просторово обмеженим. Таким чином, розглянемо систему рівнянь:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x(t)}{dt^2} &= \Omega \frac{dy(t)}{dt}, \\ \frac{d^2 y(t)}{dt^2} &= -\Omega \frac{dx(t)}{dt}. \end{aligned}$$

Вважатимемо виконаними умови існування інтегрального перетворення Фур'є і виконаємо у системі рівнянь це перетворення:

$$\begin{aligned}x(t) &:= X(\omega), \\y(t) &:= Y(\omega).\end{aligned}$$

Далі, використовуючи властивість зображення похідної, маємо:

$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt} &:= -i\omega X(\omega), \\ \frac{dy(t)}{dt} &:= -i\omega Y(\omega), \\ \frac{d^2x(t)}{dt^2} &:= -\omega^2 X(\omega), \\ \frac{d^2y(t)}{dt^2} &:= -\omega^2 Y(\omega).\end{aligned}$$

Система рівнянь набере тепер вигляду:

$$\begin{aligned}\omega^2 X(\omega) &= i\Omega\omega Y(\omega), \\ \omega^2 Y(\omega) &= -i\Omega\omega X(\omega)\end{aligned}$$

або

$$\begin{aligned}\omega^2 X(\omega) - i\Omega\omega Y(\omega) &= 0, \\ i\Omega\omega X(\omega) + \omega^2 Y(\omega) &= 0.\end{aligned}$$

Ми отримали систему лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь. Вона має ненульовий розв'язок лише у разі визначника системи рівного нулю, тобто

$$\begin{vmatrix}\omega^2 & -i\Omega\omega \\ i\Omega\omega & \omega^2\end{vmatrix} = 0$$

або

$$\omega^4 - \omega^2\Omega^2 = 0.$$

Це характеристичне рівняння має три корені:  $\omega_1 = \Omega$ ,  $\omega_2 = -\Omega$ ,  $\omega_3 = 0$ .

Знайдені корені свідчать, що у системі можливий циклічний рух з частотою  $\Omega$ . При цьому безпосередній фізичний зміст мають лише невід'ємні корені. У висліді, вихідна система має три лінійно-незалежні розв'язки, визначені з точністю до довільного сталого множника:

$$\begin{aligned}e_1(t) &= \exp(i\Omega t), \\ e_2(t) &= \exp(-i\Omega t), \\ e_3(t) &= 1.\end{aligned}$$

Відповідно,

$$x(t) = A_1 e_1(t) + B_1 e_2(t) + x_0,$$

$$y(t) = A_2 e_1(t) + B_2 e_2(t) + y_0,$$

де  $A_1, B_1, x_0, A_2, B_2, y_0$  - довільні сталі.

Оскільки всі коефіцієнти нашої системи рівнянь є дійсними, то дійсними мають бути і його розв'язки. Останнє можливе лише у разі, коли чотири з зазначених вище довільних сталих є попарно комплексно спряженими, тобто  $A_1 = B_1^*$ ,  $A_2 = B_2^*$ , а решта дійсними. Остання обставина дозволяє записати розв'язки нашого рівняння у тригонометричній формі:

$$x(t) = A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t) + x_0,$$

$$y(t) = C \cos(\Omega t) + D \sin(\Omega t) + y_0.$$

Тут  $A = 2(A_1 + B_1)$ ,  $B = 2i(A_1 - B_1)$ ,  $C = 2(A_2 + B_2)$ ,  $D = 2i(A_2 - B_2)$ .

Отриманому результату можна надати і інший вигляд. Для цього перейдемо до нових довільних сталих за формулами:

$$A = a \cos(\alpha), B = a \sin(\alpha), C = b \cos(\beta), D = b \sin(\beta).$$

У висліді,

$$x(t) = a \cos(\Omega t - \alpha) + x_0,$$

$$y(t) = b \cos(\Omega t - \beta) + y_0.$$

Симетрія задачі відносно координат  $x(t)$  і  $y(t)$  вимагає рівності амплітуд, з якими відбуваються коливання вздовж відповідних осей. Крім того, для початкових фаз має місце наступне співвідношення  $\alpha - \beta = \pi/2$ , оскільки, тільки у цьому разі можливий рух електрону за замкненою траєкторією. Зсув фаз  $\alpha - \beta = 0, \pi$  відповідає коливанню електрону вздовж прямої, що проходить через початок координат. Для інших зсувів фаз траєкторія не буде замкненою. У цьому разі

$$x(t) = a \cos(\Omega t - \alpha) + x_0,$$

$$y(t) = a \sin(\Omega t - \alpha) + y_0.$$

Проекція траєкторії електрона на площину  $xOy$  матиме вигляд кола

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = a^2.$$

Фактично, ми якісно отримали ту ж відповідь, що і при застосуванні перетворення Лапласа, проте вона містить ряд довільних сталих, які принципово залежать від початкового стану системи, скільки б часу не пройшло від початку руху. Причина присутності такої інформації пов'язана з відсутністю дисипації в системі, яка, зрештою, і приводить до зникнення пам'яті про початкові умови. Більш детальної відповіді за допомогою інтегрального перетворення Фур'є отримати не можливо, оскільки умови його існування не містять вичерпної інформації про рух.

**Рух електрона у сталих магнітному та електричному полях.** Нехай вектор індукції магнітного поля  $\mathbf{B}$  направлений вздовж осі  $z$ , а вектор напруженості електричного поля  $\mathbf{E}$  лежить у площині  $xOz$ . Рівняння руху у векторному вигляді таке

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}(t)}{dt^2} = e \mathbf{E} - \frac{e}{c} \left[ \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} \times \mathbf{B} \right].$$

У скалярному вигляді буде так:

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} = \Omega \frac{dy(t)}{dx} + \frac{e}{m} E_x,$$

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} = -\Omega \frac{dx(t)}{dx},$$

$$\frac{d^2 z(t)}{dt^2} = \frac{e}{m} E_z.$$

Після виконання перетворення Лапласа за тих же початкових умов, що і у відсутності електричного поля, система матиме вигляд:

$$p^2 X(p) - V_x = \Omega p Y(p) + \frac{e}{m} \frac{E_x}{p},$$

$$p^2 Y(p) - V_y = -\Omega p X(p),$$

$$p^2 Z(p) - V_z = \frac{e E_z}{m p}.$$

З останнього рівняння випливає, що

$$Z(p) = \Omega p Y(p) + \frac{e E_z}{m p^3} + \frac{V_z}{p^2}.$$

Звідси

$$z(t) = \frac{e E_z}{m} \frac{t^2}{2} + V_z t$$

Отже, за наявності компоненти електричного поля, паралельної вектору магнітної індукції, електрон буде рухатись вздовж неї з прискоренням

$$a = e E_z / m.$$

Перші два рівняння системи можна привести до вигляду

$$X(p) = \frac{V_x}{p^2 + \Omega^2} + \frac{\Omega V_y}{p(p^2 + \Omega^2)} + \frac{e E_x}{m},$$

$$Y(p) = \frac{V_y}{p^2} - \frac{\Omega}{p} X(p).$$

Оригіналом для першого з них є

$$x(t) = \frac{V_x}{\Omega} \sin(\Omega t) - \frac{V_y}{\Omega} [\cos(\Omega t) - 1] + \frac{e E_x}{m} \frac{t^2}{2}.$$

Відповідно

$$y(t) = V_y t - \Omega \int_0^t x(\tau) d\tau.$$

Після обчислення інтегралу

$$y(t) = \frac{V_x}{\Omega} [\cos(\Omega t) - 1] + \frac{V_y}{\Omega} \sin(\Omega t) - \frac{e E_x}{m} \Omega \frac{t^3}{6}.$$

Вирази для координат  $X$  і  $Y$  доцільно переписати так

$$x(t) - \frac{V_y}{\Omega} - \frac{e E_x}{m} \frac{t^2}{2} = \frac{V_x}{\Omega} \sin(\Omega t) - \frac{V_y}{\Omega} \cos(\Omega t),$$

$$y(t) + \frac{V_x}{\Omega} + \frac{e E_x}{m} \Omega \frac{t^3}{6} = \frac{V_x}{\Omega} \cos(\Omega t) + \frac{V_y}{\Omega} \sin(\Omega t).$$

Після піднесення цих виразів до квадрату і додавання, отримаємо

$$\left[ x(t) - \frac{V_y}{\Omega} - \frac{e E_x}{m} \frac{t^2}{2} \right]^2 + \left[ y(t) + \frac{V_x}{\Omega} + \frac{e E_x}{m} \Omega \frac{t^3}{6} \right]^2 = \frac{V_x^2 + V_y^2}{\Omega^2}.$$

Таким чином, у площині  $x_0 y_0$  електрон, як і раніше, рухається по колу, радіус якого залежить лише від початкової швидкості електрона і індукції магнітного поля. Але центр цього кола тепер дрейфує. Зміщення центра обертання з координатами  $(x_0, y_0)$  відбувається за законом

$$x_0(t) = \frac{V_y}{\Omega} + \frac{e E_x}{m} \frac{t^2}{2},$$

$$y_0(t) = -\frac{V_x}{\Omega} - \frac{e E_x}{m} \frac{t^3}{6}.$$



Видно, що швидкість дрейфу вздовж осі  $x$  визначається початковим прискоренням електрона  $eE_x/m$ , а вздовж осі  $y$  - значенням першої похідної прискорення за часом. Дійсно

$$\frac{dx_0(t)}{dt} = \frac{eE_x}{m}t,$$

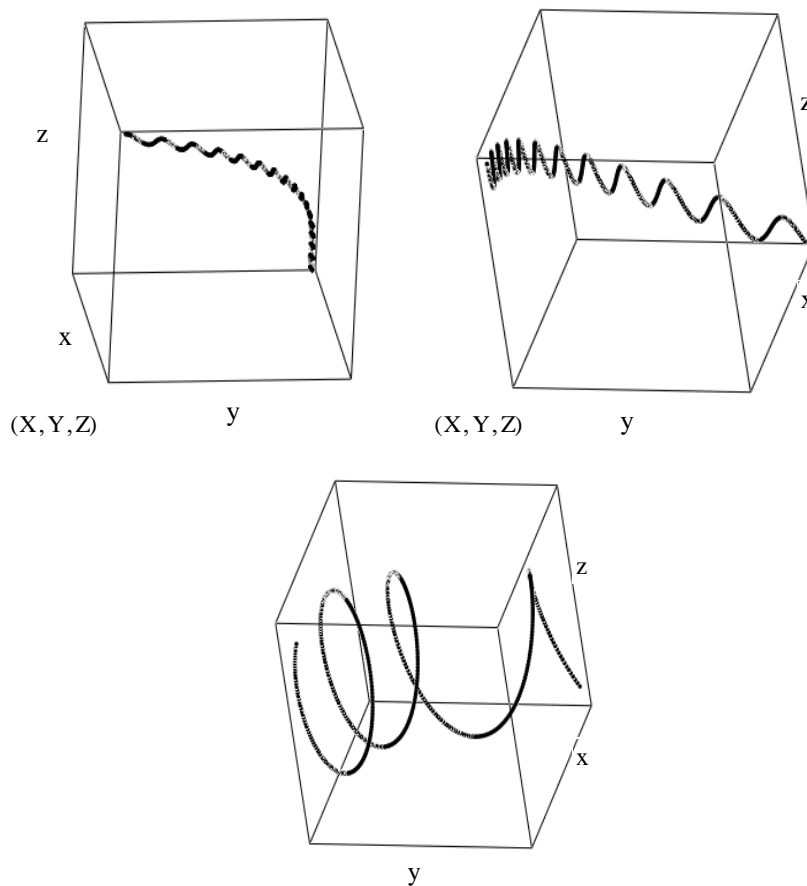
$$\frac{dy_0(t)}{dt} = -\frac{eE_x}{m}\Omega \frac{t^2}{2}.$$

Відповідно

$$\frac{d^2x_0(t)}{dt^2} = \frac{eE_x}{m},$$

$$\frac{d^2y_0(t)}{dt^2} = -\frac{eE_x}{m}\Omega t.$$

Траєкторію електрона у різному масштабі можна побачити на наступних малюнках:



**Малюнок 17**

**Рух електрона у сталому магнітному та змінному електричному полях.** Нехай виконані всі умови попередньої задачі, але напруженість електричного поля змінюється за законом

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \sin(\omega t)$$

Тоді рівняння руху, записані для зображень за Лапласом, матимуть вигляд

$$p^2 X(p) - V_x = \Omega p Y(p) + \frac{eE_{0x}}{m} \frac{\omega}{p^2 + \omega^2},$$

$$p^2 Y(p) - V_y = -\Omega p X(p),$$

$$p^2 Z(p) - V_z = \frac{eE_{0z}}{m} \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}.$$

З останнього рівняння

$$Z(p) = \frac{eE_{0z}}{m} \frac{1}{p^2} \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} + \frac{V_z}{p^2}.$$

Звідки

$$z(t) = V_z t + \frac{eE_{0z}}{m} \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} \sin(\omega \tau) d\tau$$

або

$$z(t) = V_z t + \frac{eE_{0z}}{m\omega} \int_0^t [\cos(\omega \tau) - 1] d\tau.$$

Остаточно

$$z(t) = \left( V_z + \frac{eE_{0z}}{m\omega} \right) t - \frac{eE_{0z}}{m\omega} \sin(\omega t).$$

Тобто, до рівномірного руху вздовж осі Z додається коливна складова. Першим двом рівнянням системи можна надати вигляду :

$$X(p) = \frac{V_x}{p^2 + \Omega^2} + \frac{\Omega V_y}{p(p^2 + \Omega^2)} + \frac{eE_{0x}}{m} \frac{1}{p^2} \frac{\omega}{p^2 + \omega^2},$$

$$Y(p) = \frac{V_y}{p^2} - \frac{\Omega}{p} X(p).$$

Виконуючи обернене перетворення Лапласа, маємо:

$$x(t) = \frac{V_x}{\Omega} \sin(\Omega t) - \frac{V_y}{\Omega} [\cos(\Omega t) - 1] + \frac{eE_{0x}}{m\omega} t - \frac{eE_{0x}}{m\omega^2} \sin(\omega t),$$

$$y(t) = V_y t - \Omega \int_0^t x(\tau) d\tau.$$

Після обчислення інтегралу

$$y(t) = \frac{V_x}{\Omega} [\cos(\Omega t) - 1] + \frac{V_y}{\Omega} \sin(\Omega t) - \frac{eE_{0x}}{m\omega} \Omega \frac{t^2}{2} - \frac{eE_{0x}}{m\omega^3} \Omega \cos(\omega t).$$

Аналогічно попередньому, можна представити рух електрона у площині  $x_0y_0$  у рівнянням

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2,$$

де радіус кола

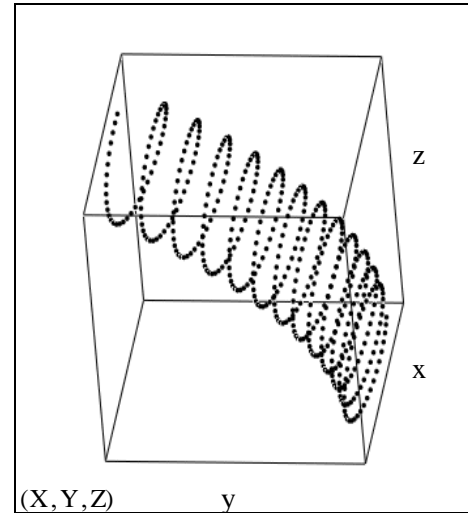
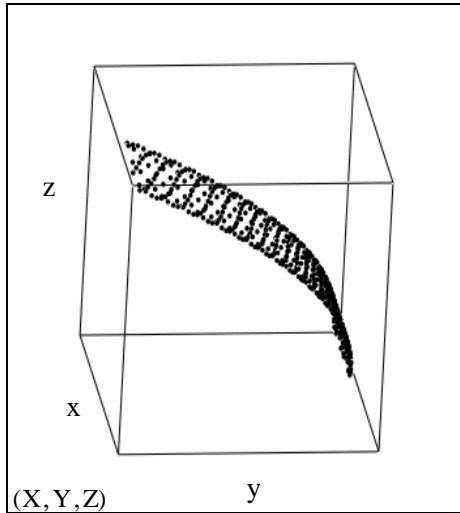
$$R = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} / \Omega,$$

координати центра кола:

$$x_0(t) = -\frac{V_y}{\Omega} - \frac{eE_{0x}}{m\omega} t + \frac{eE_{0x}}{m\omega^2} \sin(\omega t),$$

$$y_0(t) = \frac{V_x}{\Omega} + \frac{eE_{0x}}{m\omega} \Omega \frac{t^2}{2} + \frac{eE_{0x}}{m\omega^3} \Omega \cos(\omega t)$$

На наступному малюнку зображена траєкторія руху електрона у різному масштабі



Малюнок 18.

**Класична модель атома. Ефект Штарка-Зеємана.** Розв'яжемо наступну систему рівнянь методом інтегрального перетворення Фур'є:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \omega^2 x(t) &= 2\Omega \frac{dy(t)}{dt}, \\ \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \omega^2 y(t) &= -2\Omega \frac{dx(t)}{dt}, \\ \frac{d^2 z(t)}{dt^2} + \omega^2 z(t) &= 0. \end{aligned}$$

Ця система рівнянь може описувати рух електрона в атомі, розташованого у сталому і однорідному магнітному полі в рамках класичної моделі атома. Атом уявляється як просторовий осцилятор. Тут

$$\Omega = \frac{|e| H}{2mc}$$

Ларморова частота, очевидно, вдвічі менша за циклотронну частоту,

$$\omega = \sqrt{k/m}$$

- частота коливань під дією гармонічної сили. Ця система рівнянь є наслідком наступного рівняння Ньютона:

$$\frac{e}{c} \left[ \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} \times \mathbf{H} \right] - k\mathbf{r}(t) = m \frac{d^2 \mathbf{r}(t)}{dt^2} ?$$

де перший доданок у лівій частині є силою Лоренца, а другий - пружною силою,  $m$  - маса електрона,  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  - радіус вектор електрона,  $\mathbf{r}' = (x', y', z')$  - швидкість електрона,  $\mathbf{r}'' = (x'', y'', z'')$  - прискорення, з яким рухається електрон.

Нехай вектор напруженості магнітного поля напрямлений вздовж осі  $z$ . Тоді, після запису векторного добутку у координатній формі, ми і отримаємо вихідну систему рівнянь.

Рух електрона є просторово обмеженим у всіх вимірах отже, є підстави припустити виконання умов існування інтегрального перетворення Фур'є. Крім того, частота коливань електрона в атомі є надзвичайно висока. Відповідно, період одного коливання надзвичайно малий, порівняно з часом спостереження (експериментальних вимірів). У цьому випадку роль початкових умов несуттєва і використання інтегрального перетворення Лапласа недоцільне. Залишається інтегральне перетворення Фур'є.

Припустимо, що зображення за Фур'є не- відомих функцій існує:

$$x(t) =: X(\alpha),$$

$$y(t) =: Y(\alpha),$$

$$z(t) =: Z(\alpha).$$

Тоді, за властивістю зображення похідної, знайдемо зображення першої і другої похідних:

$$\frac{dx(t)}{dt} =: -i\alpha X(\alpha),$$

$$\frac{dy(t)}{dt} =: -i\alpha Y(\alpha),$$

$$\frac{dz(t)}{dt} =: -i\alpha Z(\alpha),$$

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} =: -\alpha^2 X(\alpha),$$

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} =: -\alpha^2 Y(\alpha),$$

$$\frac{d^2z(t)}{dt^2} =: -\alpha^2 Z(\alpha).$$

Після підстановки зображень у рівняння, вони наберуть вигляду:

$$-\alpha^2 X(\alpha) + \omega^2 X(\alpha) = -i\alpha 2\Omega Y(\alpha),$$

$$-\alpha^2 Y(\alpha) + \omega^2 Y(\alpha) = i\alpha 2\Omega X(\alpha),$$

$$-\alpha^2 Z(\alpha) + \omega^2 Z(\alpha) = 0.$$

або

$$(\omega^2 - \alpha^2)X(\alpha) + i\alpha 2\Omega Y(\alpha) = 0,$$

$$-i\alpha 2\Omega X(\alpha) + (\omega^2 - \alpha^2)Y(\alpha) = 0,$$

$$(\omega^2 - \alpha^2)Z(\alpha) = 0.$$

Видно, що отримана система рівнянь є сукупністю двох зв'язаних рівнянь і одного незалежного від них. Однорідна система рівнянь має ненульовий розв'язок тільки у разі, коли її визначник дорівнює нулю. Отже,

$$\begin{vmatrix} \omega^2 - \alpha^2 & i\alpha 2\Omega \\ -i\alpha 2\Omega & \omega^2 - \alpha^2 \end{vmatrix} = 0$$

або

$$(\omega^2 - \alpha^2)^2 - 4\alpha^2 \Omega^2 = 0.$$

Умовою існування ненульового розв'язку третього рівняння є

$$\omega^2 - \alpha^2 = 0.$$

Останні два рівняння мають наступні корені:

$$\varphi(y) \exp \left[ -\frac{(x-y)^2}{4a^2 t} \right] dy$$

$$\alpha_1 = \omega,$$

$$\alpha_2 = -\omega,$$

$$\alpha_3 = \Omega + \sqrt{\omega^2 + \Omega^2},$$

$$\alpha_4 = \Omega - \sqrt{\omega^2 + \Omega^2},$$

$$\alpha_5 = -\Omega + \sqrt{\omega^2 + \Omega^2},$$

$$\alpha_6 = -\Omega - \sqrt{\omega^2 + \Omega^2}.$$

Цілком зрозуміло, що безпосередній фізичний зміст мають лише додатні корені:  $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_5$ . Таким чином, випромінювання одного просторового осцилятора еквівалентне випромінюванню трьох лінійних осциляторів, що рухаються вздовж відповідних осей.

Відповідно до знайдених власних чисел, наша система рівнянь має шість наступних лінійно незалежних розв'язків:

$$e_1(t) = \exp(i\omega t),$$

$$e_2(t) = \exp(-i\omega t),$$

$$e_3(t) = \exp[i(\Omega + \sqrt{\omega^2 + \Omega^2})t],$$

$$e_4(t) = \exp[i(\Omega - \sqrt{\omega^2 + \Omega^2})t],$$

$$e_5(t) = \exp[i(-\Omega + \sqrt{\omega^2 + \Omega^2})t],$$

$$e_6(t) = \exp[i(-\Omega - \sqrt{\omega^2 + \Omega^2})t].$$

за допомогою яких можна записати і загальні розв'язки вихідної системи рівнянь. При цьому перші два лінійно незалежні розв'язки формують загальний розв'язок третього рівняння, наступні чотири - перших двох рівнянь вихідної системи. Отже,

$$\begin{aligned} x(t) &= A_1 \exp[i(\Omega + \sqrt{\omega^2 + \Omega^2})t] + B_1 \exp[i(\Omega - \sqrt{\omega^2 + \Omega^2})t] + \\ &+ C_1 \exp[i(-\Omega + \sqrt{\omega^2 + \Omega^2})t] + D_1 \exp[i(-\Omega - \sqrt{\omega^2 + \Omega^2})t], \\ y(t) &= A_2 \exp[i(\Omega + \sqrt{\omega^2 + \Omega^2})t] + B_2 \exp[i(\Omega - \sqrt{\omega^2 + \Omega^2})t] + \\ &+ C_2 \exp[i(-\Omega + \sqrt{\omega^2 + \Omega^2})t] + D_2 \exp[i(-\Omega - \sqrt{\omega^2 + \Omega^2})t], \\ z(t) &= A_3 \exp[i\omega t] + B_3 \exp[-i\omega t] \end{aligned}$$

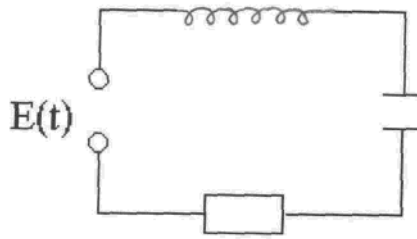
Очевидно, що 10 довільних сталих, що входять у наведені загальні розв'язки, не можуть бути знайдені в межах нашої постановки задачі, оскільки у ній відсутня необхідна для їх знайдення інформація. У даному разі детальна інформація про рух електрона мало цікава. Зате використання перетворення Фур'є дозволяє легко отримати пояснення експериментально спостережуваної інформації щодо спектральних ліній атома у магнітному полі. Цікавою є та обставина, що при спостереженні вздовж осі  $z$  спостерігатимуться лише дві частоти. При спостереженні вздовж довільної осі, перпендикулярної осі  $z$ , спостерігатимуться всі три частоти. Причиною такого ефекту є те, що інтенсивність випромінювання вздовж осі  $z$  визначається законами руху електрона вздовж осей  $x$  і  $y$ . Останнє ж визначається лише двома частотами. Інтенсивність же випромінювання вздовж, наприклад осі  $x$ , визначається законом руху електрона вздовж осей  $y$  і  $z$ . Ці закони руху визначаються вже трьома частотами. Це явище називається ефектом Зеємана (Zeeman<sup>3</sup>)-Штарка (Stark)<sup>4</sup>.

### 2.3. Струм в електричному колі

<sup>3</sup> Зеєман Пітер (25.5.1865-9.10.43) - нідерландський фізик.

<sup>4</sup> Штарк Й. (1874-1957) - німецький фізик.

**Елементарне електричне коло.** Елементарним електричним колом називається коло, що складається з послідовно з'єднаних індуктивності  $L$ , ємності  $C$  і активного опору  $R$ . Елементарне електричне коло, приєднане до джерела електрорушійної сили (е.р.с.)  $E(t)$  має вигляд



**Малюнок 19**

В основі математичної моделі елементарного кола лежить закон Ома для замкнутого кола

$$U_L(t) + U_R(t) + U_C(t) = E(t),$$

де

$$U_L(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

падіння напруги на індуктивності,

$$U_R(t) = Ri(t)$$

падіння напруги на опорі,

$$U_C(t) = \frac{q(t)}{C}$$

- падіння напруги на ємності, де  $q(t)$  – заряд на обкладинках конденсатора у момент часу  $t$ ,  $i(t)$  – струм у колі. Отже, математична модель розглянутого кола складається з наступних двох рівнянь:

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{q(t)}{C} = E(t),$$

$$\frac{dq(t)}{dt} = i(t)$$

і відповідних додаткових умов для них. В якості останніх візьмемо спочатку початкові умови

$$i(0) = i_0,$$

$$q(0) = q_0,$$

які не тільки гарантують існування і єдиність розв'язку системи двох звичайних диференціальних рівнянь але і дають найбільш детальний опис динамічної поведінки системи.

Наявність початкових умов і сталість коефіцієнтів системи диференціальних рівнянь є ідеальним збігом обставин для застосування до розв'язання системи інтегрального перетворення Лапласа. Припускаючи існування зображень невідомих функцій:

$$i(t) =: I(p),$$

$$q(t) =: Q(p),$$

за властивістю зображення похідної знайдемо:

$$\frac{di(t)}{dt} =: pI(p) - i(0) = pI(p) - i_0,$$

$$\frac{dq(t)}{dt} =: pQ(p) - q(0) = pQ(p) - q_0$$

Е.р.с. джерела  $E(t)$  візьмемо у довільному вигляді з єдиним обмеженням, що відповідне зображення за Лапласом існує

$$E(t) =: E(p)$$

Після застосування перетворення Лапласа до системи звичайних диференціальних рівнянь остання перетворюється у наступну систему двох лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{aligned} LpI(p) - Li_0 + RI(p) + Q(p)/C &= E(p), \\ pQ(p) - q_0 &= I(p) \end{aligned}$$

Оскільки надалі нас цікавитиме лише струм, то виключаючи з системи заряд для Лаплас-образу отримаємо наступне рівняння

$$Z(p)I(p) = E(p) + Li_0 - q_0/Cp,$$

де ми ввели позначення для коефіцієнта пропорційності між Лаплас-образом струму і Лаплас-образами чинників, що викликають цей струм

$$Z(p) = Lp + R + 1/Cp$$

Функція  $Z(p)$  називається імпедансом або повним опором кола і описує опір, що чинить коло протіканню змінному у часі струму. Якщо струм є сталою величиною, то імпеданс дорівнює активному опору системи  $Z(p) = R$ . Різниця між імпедансом і активним опором системи називається реактивним опором системи. Зауважимо, що сталий електричний струм може протікати лише за відсутності ємності  $C = \infty$  і сталої е.р.с.  $E(t) = const$ . Імпеданс є ключовим об'єктом теорії електричних кіл, оскільки він містить повну інформацію про властивості системи і після його обчислення знаходження самого струму стає технічною проблемою, для розв'язання якої потрібно обчислити певний інтеграл.

Не менш зручною за імпеданс є і обернена до нього величина

$$G(p) = 1/Z(p),$$

яка дозволяє записати вираз для Лаплас-образу струму так

$$I(p) = G(p)[E(p) + Li_0 - q_0/Cp]$$

Якщо розглядати електричний струм як відгук кола на зовнішні чинники, що порушують стан його рівноваги – відсутність струму, то останній вираз зручно записати у вигляді двох фізично різних доданків

$$I(p) = [I(p) - \tilde{I}(p)] + \tilde{I}(p)$$

Перший доданок у правій частині визначає відгук системи лише на дію зовнішньої сили – е.р.с. Другий доданок – відгук системи лише на збурення початкових умов. Перший чинник може діяти довільний час, підтримуючи струм у колі, другий чинник діє лише у момент часу  $t = 0$ , створюючи лише у цей момент ненульовий струм  $i_0$  і заряд  $q_0$ . Подальша доля цих початкових струму і заряду залежить від властивостей системи.  $\tilde{I}(p)$  має назву струму короткого замикання, оскільки він існує і у відсутності е.р.с. джерела, коли його клемми, наприклад, замкнені. Виконуючи обернене перетворення Лапласа для струму у колі знайдемо

$$i(t) = \int_0^t G(\tau)E(t-\tau)d\tau + Li_0G(t) - \frac{q_0}{C} \int_0^t G(\tau)d\tau$$

Тут ми використали такі властивості перетворення Лапласа як зображення згортки і зображення інтегралу. Як ми бачимо, функція  $G(p)$  є функцією Гріна даної задачі. Знайдемо її

$$G(p) = 1/Z(p) = 1/(Lp + R + 1/Cp)$$

Для виконання оберненого перетворення Лапласа зручно представити останній вираз так

$$G(p) = \frac{p}{L(p^2 + Rp/L + 1/CL)} = \frac{p/L}{(p + R/2L)^2 + 1/CL - R^2/4L^2} =$$

$$= \frac{p/L}{(p + \tau^{-1})^2 + \Omega^2}$$

Тут ми ввели наступні позначення

$$\Omega = \sqrt{\frac{1}{CL} - \frac{R^2}{4L^2}},$$

$$\frac{1}{\tau} = \frac{R}{2L}$$

Фізичний зміст цих нових параметрів ми побачимо дещо згодом. Для приведення  $G(p)$  до суми простих табличних зображень запишемо

$$G(p) = \frac{1}{L} \frac{p + \tau^{-1}}{(p + \tau^{-1})^2 + \Omega^2} - \frac{\tau^{-1}}{L\Omega} \frac{\Omega}{(p + \tau^{-1})^2 + \Omega^2}$$

Використовуючи теорему зсуву для оригінала отримаємо

$$G(t) = \frac{1}{L} \exp(-t/\tau) \cos(\Omega t) - \frac{\tau^{-1}}{L\Omega} \exp(-t/\tau) \sin(\Omega t)$$

У разі  $\Omega > 0$   $\Omega$  має сенс частоти коливань,  $\tau$  є часом релаксації, тобто часом за який амплітуда коливань спадає в  $e$  разів. Тепер

$$i(t) - \tilde{i}(t) = \frac{1}{L} \int_0^t \exp(-t'/\tau) \cos(\Omega t') E(t-t') dt' -$$

$$- \frac{1}{L\Omega\tau} \int_0^t \exp(-t'/\tau) \sin(\Omega t') E(t-t') dt'$$

Струм короткого замикання

$$\tilde{i}(t) = i_0 \exp(-t/\tau) \cos(\Omega t) - (i_0/\Omega\tau) \exp(-t/\tau) \sin(\Omega t) -$$

$$- q_0 \Omega_0^2 \int_0^t \exp(-t'/\tau) \cos(\Omega t') dt' + \frac{q_0 \Omega_0^2}{\Omega\tau} \int_0^t \exp(-t'/\tau) \sin(\Omega t') dt'$$

де

$$\Omega_0 = \sqrt{1/LC}$$

- частота коливань без урахування опору системи. Оскільки

$$\int_0^t \exp(-t'/\tau) \sin(\Omega t') dt' = -\tau \exp(-t/\tau) \sin(\Omega t) +$$

$$+ \Omega\tau \int_0^t \exp(-t'/\tau) \cos(\Omega t') dt'$$

то струм короткого замикання можна представити так

$$\tilde{i}(t) = i_0 \exp(-t/\tau) \cos(\Omega t) - (i_0/\Omega\tau) \exp(-t/\tau) \sin(\Omega t) -$$

$$- \frac{q_0 \Omega_0^2}{\Omega\tau} \exp(-t/\tau) \sin(\Omega t)$$



Отже, за наявності в колі активного опору  $R > 0$  струм короткого замикання спадає з часом релаксації  $\tau$ .

Гармонійна е.р.с. Суттєвим для практики випадком є такий, де е.р.с. джерела струму змінюється за гармонійним законом. У цьому разі її можна записати так

$$E(t) = E_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

Тут  $E_0$  – амплітуда,  $\varphi$  – початкова фаза,  $\omega_0$  – частота е.р.с. Ще одним варіантом останньої формули є такий

$$E(t) = E_1 \cos(\omega_0 t) - E_2 \sin(\omega_0 t),$$

де

$$E_1 = E_0 \cos(\varphi), \quad E_2 = E_0 \sin(\varphi)$$

Оскільки

$$\begin{aligned} \int_0^t \exp(-t'/\tau) \cos(\Omega t') E(t-t') dt' &= -\tau \exp(-t/\tau) \sin(\Omega t) E(0) + \\ &+ \Omega \tau \int_0^t \exp(-t'/\tau) \cos(\Omega t') E(t-t') dt' + \\ &+ \Omega \tau^2 \int_0^t \exp(-t'/\tau) \sin(\Omega t') \frac{dE(t-t')}{dt'} dt' \end{aligned}$$

то вираз для струму в елементарному колі за винятком струму короткого замикання можна записати так

$$\begin{aligned} i(t) - \tilde{i}(t) &= \frac{1}{L\Omega} \exp(-t/\tau) \sin(\Omega t) E(0) - \\ &- \frac{1}{L\Omega} \int_0^t \exp(-t'/\tau) \sin(\Omega t') \frac{dE(t-t')}{dt'} dt' \end{aligned}$$

Для гармонійної е.р.с.

$$\begin{aligned} i(t) - \tilde{i}(t) &= \frac{E_0}{L\Omega} \cos(\varphi) \exp(-t/\tau) \sin(\Omega t) + \\ &- \frac{E_0}{L\Omega} \int_0^t \exp(-t'/\tau) \sin(\Omega t') \sin[\omega_0(t-t_0) + \varphi] dt' \end{aligned}$$

Для подальшого інтегрування доцільно використати формули Ейлера:

$$\sin(x) = [\exp(ix) - \exp(-ix)] / 2i,$$

$$\cos(x) = [\exp(ix) + \exp(-ix)] / 2.$$

Результату інтегрування природно надати вигляду суми двох доданків

$$i(t) - \tilde{i}(t) = i_n(t) + i_p(t)$$

Тут

$$\begin{aligned} i_n(t) &= \frac{E_0}{2L\Omega} \left[ \frac{\tau^{-1}}{\tau^{-2} + (\Omega + \omega_0)^2} - \frac{\tau^{-1}}{\tau^{-2} + (\Omega - \omega_0)^2} \right] \cos(\omega_0 t + \varphi) - \\ &- \frac{E_0}{2L\Omega} \left[ \frac{\Omega + \omega_0}{\tau^{-2} + (\Omega + \omega_0)^2} - \frac{\Omega - \omega_0}{\tau^{-2} + (\Omega - \omega_0)^2} \right] \sin(\omega_0 t + \varphi) - \end{aligned}$$

- так званий усталений струм, що змінюється за гармонійним законом з частотою, що збігається з частотою е.р.с.

$$\begin{aligned}
i_p(t) = & \frac{E_0}{2L\Omega} \frac{\tau^{-1}}{\tau^{-2} + (\Omega - \omega_0)^2} \exp(-t/\tau) \cos(\Omega t + \varphi) - \\
& - \frac{E_0}{2L\Omega} \frac{\tau^{-1}}{\tau^{-2} + (\Omega + \omega_0)^2} \exp(-t/\tau) \cos(\Omega t - \varphi) - \\
& - \frac{E_0}{2L\Omega} \frac{\Omega - \omega_0}{\tau^{-2} + (\Omega - \omega_0)^2} \exp(-t/\tau) \sin(\Omega t + \varphi) + \\
& + \frac{E_0}{2L\Omega} \frac{\Omega + \omega_0}{\tau^{-2} + (\Omega + \omega_0)^2} \exp(-t/\tau) \sin(\Omega t - \varphi)
\end{aligned}$$

- так званий перехідний струм, що змінюється подібно до струму короткого замикання з частотою власних коливань  $\Omega$ , якщо  $\Omega > 0$ . Цей струм спадає з часом релаксації  $\tau$  і лише його амплітуда залежить як від амплітуди е.р.с., так і від її частоти  $\omega_0$ . Таким чином, струм у колі можна представити сумою трьох доданків

$$i(t) = i_n(t) + i_p(t) + \tilde{i}(t)$$

При цьому усталений струм  $i_n(t)$  описує вимушені електричні коливання під дією зовнішньої е.р.с., струм короткого замикання  $\tilde{i}(t)$  описує власні коливання, зумовлені збуренням рівноважного стану системи у момент часу  $t = 0$ , перехідний струм описує інтерференцію цих двох видів коливань. Останній викликається зовнішньою е.р.с., але змінюється у часі з частотою власних коливань, спадаючи з тим самим часом релаксації, що і власні коливання.

Розглянемо також і деякі інші прості випадки е.р.с. Нехай, наприклад, е.р.с. має імпульсний характер

$$E(t) = E_0(t)\delta(t),$$

тобто вона відмінна від нуля лише у початковий момент часу, приймаючи при цьому нескінченно велике значення. Струм короткого замикання буде таким, як і у попередньому випадку, а

$$i(t) - \tilde{i}(t) = E_0 \int_0^t G(t') \delta(t - t') dt' = E_0 G(t)$$

або

$$i(t) - \tilde{i}(t) = \frac{E_0}{L} \exp(-t/\tau) \cos(\Omega t) - \frac{E_0}{L\Omega\tau} \exp(-t/\tau) \sin(\Omega t)$$

Усталений струм у даному разі відсутній, а перехідний струм з точністю до сталого множника просто дорівнює функції Гріна. Фактично зазначена рівність є одним з можливих означень функції Гріна. Стосовно даної задачі функція Гріна дорівнює струму у колі, що виникає під дією дельта-подібної е.р.с. з одиничною амплітудою  $E_0 = 1$ .

Іншим простим і цікавим випадком є випадок сталої е.р.с.  $E(t) = E_0$ . У цьому разі ми отримуємо вже проаналізований у першому параграфі цієї глави випадок.

Усталений струм. Для знаходження струму в елементарному електричному колі можна використовувати і інтегральне перетворення Фур'є. Умова його існування є більшою обмежувальною умовою, накладеною на можливий розв'язок задачі, ніж відповідні умови щодо перетворення Лапласа. Фактично за допомогою перетворення Фур'є ми можемо знайти лише стаціонарні розв'язки задачі, тобто лише усталений струм. При цьому поза увагою залишаються перехідний струм і струм короткого замикання. Перевагою ж такого підходу є більша простота розв'язання задачі. Розглянемо такий підхід. Нехай

$$i(t) := I(\omega),$$

$$q(t) := Q(\omega),$$

тоді за властивістю зображення похідної

$$\frac{di(t)}{dt} := -i\omega I(\omega),$$

$$\frac{dq(t)}{dt} := -i\omega Q(\omega).$$

Після застосування інтегрального перетворення Фур'є до вихідної системи двох звичайних диференціальних рівнянь вони також перетворюються у систему двох лінійних алгебраїчних рівнянь

$$-iL\omega I(\omega) + R(\omega) + Q(\omega)/C = E(\omega),$$

$$-i\omega Q(\omega) = I(\omega).$$

Оскільки

$$\cos(\omega_0 t) := \pi[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)],$$

$$\sin(\omega_0 t) := i\pi[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)],$$

то для Фур'є-образу е.р.с., для якої у разі гармонійного закону зручно використовувати вираз

$$E(t) = E_1 \cos(\omega_0 t) - E_2 \sin(\omega_0 t).$$

Тоді ми отримаємо наступний результат

$$E(\omega) := \pi E_1[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)] - i\pi E_2[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)].$$

Виключаючи з системи рівнянь Фур'є-образ заряду для Фур'є-образу струму отримуємо наступне рівняння

$$Z(\omega)I(\omega) = E(\omega),$$

де аналогічно попередньому розгляду ми ввели імпеданс системи

$$Z(\omega) = -iL\omega + R + i/C\omega.$$

Якщо вважати частоту  $\omega$  дійсною величиною, то імпеданс тепер має простий фізичний зміст

$$\operatorname{Re}[Z(\omega)] = R,$$

$$\operatorname{Im}[Z(\omega)] = -L\omega + 1/C\omega,$$

тобто дійсна його частина дорівнює величині активного опору системи, а уявна – реактивному. Очевидно, що між означеннями імпедансу при використанні перетворень Лапласа  $Z_L(p)$  і Фур'є  $Z_F(\omega)$  існує простий зв'язок

$$Z_F(\omega) = Z_L(-i\omega)$$

або

$$Z_L(p) = Z_F(ip).$$

Це дозволяє знаходити імпеданс будь-яким з двох методів і надалі використовувати його незалежно від його походження. Сказане стосується і функції Гріна. Проте, якщо нас цікавить лише усталений струм, то варто шукати його безпосередньо, використовуючи  $Z_F(\omega)$ . Надалі продовжимо математичні викладки саме у цьому напрямі. Отже,

$$I(\omega) = E(\omega)/Z(\omega).$$

Відповідно

$$i(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{E(\omega)}{Z(\omega)} \exp(-i\omega t) d\omega.$$

Для гармонійної е.р.с.

$$\begin{aligned}
i(t) &= \frac{E_1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)}{Z(\omega)} \exp(-i\omega t) d\omega + \\
&\quad + i \frac{E_2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)}{Z(\omega)} \exp(-i\omega t) d\omega = \\
&= \frac{E_1}{2} \left[ \frac{\exp(i\omega_0 t)}{Z(-\omega_0)} + \frac{\exp(-i\omega_0 t)}{Z(\omega_0)} \right] + i \frac{E_2}{2} \left[ \frac{\exp(i\omega_0 t)}{Z(-\omega_0)} - \frac{\exp(-i\omega_0 t)}{Z(\omega_0)} \right].
\end{aligned}$$

Знову використовуючи формули Ейлера, формулі для електричного струму можна надати такої ж структури як і е.р.с.

$$i(t) = I_1(\omega_0) \cos(\omega_0 t) - I_2(\omega_0) \sin(\omega_0 t),$$

де

$$\begin{aligned}
I_1(\omega) &= \frac{RE_1}{R^2 + (L\omega - 1/C\omega)^2} + \frac{(L\omega - 1/C\omega)E_2}{R^2 + (L\omega - 1/C\omega)^2}, \\
I_2(\omega) &= \frac{(L\omega - 1/C\omega)E_1}{R^2 + (L\omega - 1/C\omega)^2} - \frac{RE_2}{R^2 + (L\omega - 1/C\omega)^2}.
\end{aligned}$$

Результату для струму можна надати і іншої форми, а саме

$$i(t) = I_0(\omega_0) \cos(\omega_0 t + \varphi),$$

де

$$I_0(\omega_0) = \sqrt{I_1^2(\omega_0) + I_2^2(\omega_0)}.$$

Якщо вважати, що  $-\pi \leq \psi \leq \pi$ , то

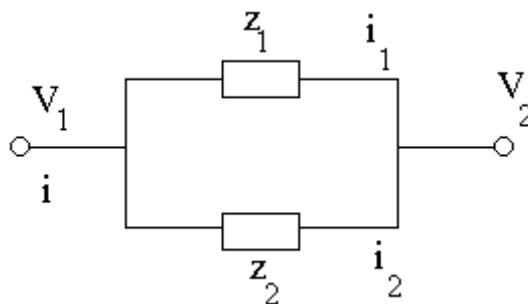
$$\begin{aligned}
\psi &= \arctan[I_2(\omega_0)/I_1(\omega_0)], & I_1(\omega_0) > 0, \\
\psi &= \arctan[I_2(\omega_0)/I_1(\omega_0)] + \pi, & I_1(\omega_0) < 0, \quad I_2(\omega_0) > 0, \\
\psi &= \arctan[I_2(\omega_0)/I_1(\omega_0)] - \pi, & I_1(\omega_0) < 0, \quad I_2(\omega_0) < 0.
\end{aligned}$$

Звідси видно, що у загальному випадку фази струму  $\psi$  і е.р.с.  $\varphi$  не збігаються. Лише у відсутності індуктивності  $L = 0$  і ємності  $C = \infty$   $\varphi = \psi$ . Можна перевірити, що знайдений нами за допомогою інтегрального перетворення Фур'є струм збігається із ustalеним струмом, знайденим за допомогою інтегрального перетворення Лапласа.

Паралельне і послідовне з'єднання елементарних кіл. Будемо називати елементарним колом, складене з послідовно з'єднаних індуктивності, ємності і активного опору. Імпеданс такого кола, як було показано вище,

$$Z(p) = Lp + 1/Cp.$$

Розглянемо паралельне з'єднання двох паралельних кіл



Малюнок 20

Розгляд відразу зручно проводити на рівні Лаплас–образів відповідних функцій. Для першого елементарного кола

$$\begin{aligned} Z_1(p)[I_1(p) - \tilde{I}_1(p)] &= E(p), \\ Z_1(p)\tilde{I}_1(p) &= L_1 i_1(0) - q_1(0) / C_1 p. \end{aligned}$$

Для другого елементарного кола

$$\begin{aligned} Z_2(p)[I_2(p) - \tilde{I}_2(p)] &= E(p), \\ Z_2(p)\tilde{I}_2(p) &= L_2 i_2(0) - q_2(0) / C_2 p. \end{aligned}$$

Для всього паралельного з'єднання

$$\begin{aligned} Z(p)[I(p) - \tilde{I}(p)] &= E(p), \\ \tilde{I}(p) &= \tilde{I}_1(p) + \tilde{I}_2(p), \\ I(p) &= I_1(p) + I_2(p). \end{aligned}$$

Тепер легко знайти співвідношення між імпедансами окремих елементарних кіл і імпедансом всього паралельного з'єднання. Для цього два останні рівняння запишемо як одне

$$I(p) - \tilde{I}(p) = I_1(p) - \tilde{I}_1(p) + I_2(p) - \tilde{I}_2(p)$$

і підставимо у нього вирази для відповідних струмів

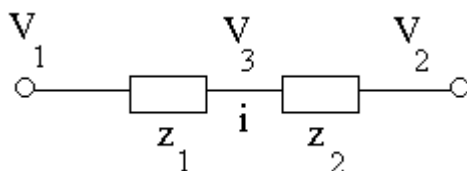
$$\begin{aligned} I(p) - \tilde{I}(p) &= E(p) / Z(p), \\ I_1(p) - \tilde{I}_1(p) &= E(p) / Z_1(p), \\ I_2(p) - \tilde{I}_2(p) &= E(p) / Z_2(p). \end{aligned}$$

У висліді після скорочення на  $E(p)$  отримаємо, що

$$\frac{1}{Z(p)} = \frac{1}{Z_1(p)} + \frac{1}{Z_2(p)}.$$

Отже, при паралельному з'єднанні елементарних кіл обернений імпеданс паралельного сполучення двох елементарних кіл дорівнює сумі обернених імпедансів цих елементарних кіл.

Нехай тепер елементарні кола з'єднані послідовно



Малюнок 21

Тепер через кожне елементарне коло тече той самий струм, але прикладена різна е.р.с.

$$E_1(t) = V_3(t) - V_1(t),$$

$$E_2(t) = V_2(t) - V_3(t),$$

$$E_3(t) = V_2(t) - V_1(t).$$

Закон Ома для кожного елементарного кола можна записати так

$$Z_1(p)[I(p) - \tilde{I}(p)] = E_1(p),$$

$$Z_1(p)\tilde{I}(p) = L_1 i_1(0) - q_1(0) / C_1 p,$$

$$Z_2(p)[I(p) - \tilde{I}(p)] = E_2(p),$$

$$Z_2(p)\tilde{I}(p) = L_2 i_2(0) - q_2(0) / C_2 p.$$

Для всього послідовного з'єднання

$$Z(p)[I(p) - \tilde{I}(p)] = E(p),$$

де

$$E(p) = E_1(p) + E_2(p).$$

Підклавши в останнє рівняння відповідні значення е.р.с. і скоротивши його на  $I(p) - \tilde{I}(p)$  одержимо

$$Z(p) = Z_1(p) + Z_2(p).$$

Тобто імпеданс послідовного сполучення елементарних кіл дорівнює сумі імпедансів цих елементарних кіл.

Знайдемо тепер конкретні значення струмів для паралельного і послідовного з'єднань елементарних кіл.

Паралельне з'єднання. У цьому разі

$$i(t) = i_n(t) + i_p(t) + \tilde{i}(t).$$

Тут всі доданки у правій частині є сумами відповідних струмів, що виникають у кожній з паралельних ділянок:

$$\begin{aligned} \tilde{i}(t) &= i_{10} \exp(-t / \tau_1) \cos(\Omega_1 t) + i_{20} \exp(-t / \tau_2) \cos(\Omega_2 t) - \\ &\quad - (i_{10} / \Omega_1 \tau_1 + q_{10} \Omega_1) \exp(-t / \tau_1) \sin(\Omega_1 t) - \\ &\quad - (i_{20} / \Omega_2 \tau_2 + q_{20} \Omega_2) \exp(-t / \tau_2) \sin(\Omega_2 t), \\ i_n(t) &= \frac{E_0}{2L_1 \Omega_1} \left[ \frac{\tau_1^{-1}}{\tau_1^{-2} + (\Omega_1 + \omega_0)^2} - \frac{\tau_1^{-1}}{\tau_1^{-2} + (\Omega_1 - \omega_0)^2} \right] \cos(\omega_0 t + \varphi) - \\ &\quad - \frac{E_0}{2L_1 \Omega_1} \left[ \frac{\tau_1^{-1}}{\tau_1^{-2} + (\Omega_1 + \omega_0)^2} - \frac{\tau_1^{-1}}{\tau_1^{-2} + (\Omega_1 - \omega_0)^2} \right] \sin(\omega_0 t + \varphi) + \\ &\quad + \frac{E_0}{2L_2 \Omega_2} \left[ \frac{\tau_2^{-1}}{\tau_2^{-2} + (\Omega_2 + \omega_0)^2} - \frac{\tau_2^{-1}}{\tau_2^{-2} + (\Omega_2 - \omega_0)^2} \right] \cos(\omega_0 t + \varphi) - \\ &\quad - \frac{E_0}{2L_2 \Omega_2} \left[ \frac{\tau_2^{-1}}{\tau_2^{-2} + (\Omega_2 + \omega_0)^2} - \frac{\tau_2^{-1}}{\tau_2^{-2} + (\Omega_2 - \omega_0)^2} \right] \sin(\omega_0 t + \varphi), \\ i_p(t) &= \frac{E_0}{2L_1 \Omega_1} \frac{\tau_1^{-1}}{\tau_1^{-2} + (\Omega_1 - \omega_0)^2} \exp(-t / \tau_1) \cos(\Omega_1 t + \varphi) - \\ &\quad - \frac{E_0}{2L_1 \Omega_1} \frac{\tau_1^{-1}}{\tau_1^{-2} + (\Omega_1 + \omega_0)^2} \exp(-t / \tau_1) \cos(\Omega_1 t - \varphi) - \end{aligned}$$

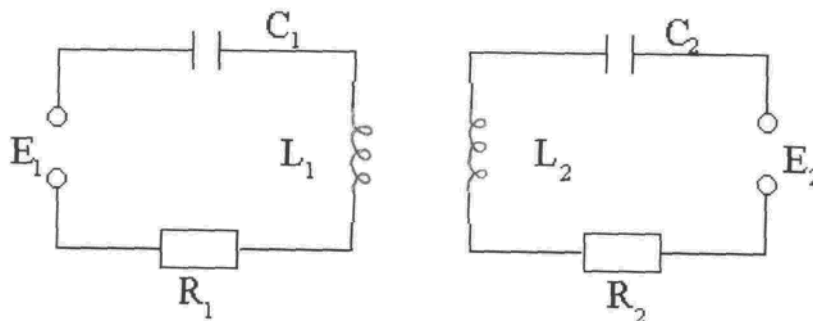
$$\begin{aligned}
& - \frac{E_0}{2L_1\Omega_1} \frac{\Omega_1 - \omega_0}{\tau_1^{-2} + (\Omega_1 - \omega_0)^2} \exp(-t/\tau_1) \sin(\Omega_1 t + \varphi) + \\
& + \frac{E_0}{2L_1\Omega_1} \frac{\Omega_1 + \omega_0}{\tau_1^{-2} + (\Omega_1 + \omega_0)^2} \exp(-t/\tau_1) \sin(\Omega_1 t - \varphi) + \\
& + \frac{E_0}{2L_2\Omega_2} \frac{\tau_2^{-1}}{\tau_2^{-2} + (\Omega_2 - \omega_0)^2} \exp(-t/\tau_2) \cos(\Omega_2 t + \varphi) - \\
& - \frac{E_0}{2L_2\Omega_2} \frac{\tau_2^{-1}}{\tau_2^{-2} + (\Omega_2 + \omega_0)^2} \exp(-t/\tau_2) \cos(\Omega_2 t - \varphi) - \\
& - \frac{E_0}{2L_2\Omega_2} \frac{\Omega_2 - \omega_0}{\tau_2^{-2} + (\Omega_2 - \omega_0)^2} \exp(-t/\tau_2) \sin(\Omega_2 t + \varphi) + \\
& + \frac{E_0}{2L_2\Omega_2} \frac{\Omega_2 + \omega_0}{\tau_2^{-2} + (\Omega_2 + \omega_0)^2} \exp(-t/\tau_2) \sin(\Omega_2 t - \varphi)
\end{aligned}$$

де індекси 1 і 2 відповідають першій і другій гілкам паралельного з'єднання. Можна помітити, що лише усталені коливання у паралельному з'єднанні залишаються гармонійними, оскільки вони відбуваються з частотою зовнішньої е.р.с. Струм короткого замикання і перехідний струм у паралельному з'єднанні вже буде суперпозицією коливань з частотами власних коливань кожної з гілок.

Послідовне з'єднання. Легко бачити, що при послідовному з'єднанні двох елементарних кіл струм буде змінюватись за тим самим законом, що і для одного елементарного кола, але з параметрами

$$\begin{aligned}
L &= L_1 + L_2, \\
C^{-1} &= C_1^{-1} + C_2^{-1}.
\end{aligned}$$

Індуктивний зв'язок елементарних кіл. Прикладом такого зв'язку може бути наступна електрична схема



Малюнок 22

Система рівнянь, що описує дану схему є такою

$$\begin{aligned} L_1 \frac{di_1(t)}{dt} + R_1 i_1(t) + \frac{q_1(t)}{C_1} &= E_1(t) + L_{12} \frac{di_2(t)}{dt}, \\ L_2 \frac{di_2(t)}{dt} + R_2 i_2(t) + \frac{q_2(t)}{C_2} &= E_2(t) + L_{12} \frac{di_1(t)}{dt}, \\ \frac{dq_1(t)}{dt} &= i_1(t), \\ \frac{dq_2(t)}{dt} &= i_2(t). \end{aligned}$$

Додаткові умови розглянемо як умови Коші

$$\begin{aligned} i_1(0) &= i_{10}, \\ i_2(0) &= i_{20}, \\ q_1(0) &= q_{10}, \\ q_2(0) &= q_{20}. \end{aligned}$$

Після застосування до рівнянь перетворення Лапласа і виключення заряду вони наберуть вигляду

$$\begin{aligned} z_1(p)I_1(p) &= E_1(p) + i_{01} - q_{10}/C_1 p + L_{12} p I_2(p) - L_{12} i_{20}, \\ z_2(p)I_2(p) &= E_2(p) + i_{02} - q_{20}/C_2 p + L_{12} p I_1(p) - L_{12} i_{10}. \end{aligned}$$

Тут  $L_{12}$  – коефіцієнт взаємної індукції,

$$\begin{aligned} z_1(p) &= L_1 p + R_1 + 1/C_1 p, \\ z_2(p) &= L_2 p + R_2 + 1/C_2 p \end{aligned}$$

- імпеданси окремих елементарних електричних кіл. Розв'язки отриманих рівнянь мають вигляд

$$\begin{aligned} I_1(p) &= [z_1(p)z_2(p) - L_{12}^2 p^2]^{-1} \times \\ &\times \left\{ z_2(p)E_1(p) + L_{12} p E_2(p) + [z_2(p) - L_{12}^2 p]i_{10} + \right. \\ &\left. + L_{12}[p - z_2(p)]i_{20} - [z_2(p)/C_1 p]q_{10} - (L_{12}/C_2)q_{20} \right\}, \\ I_2(p) &= [z_1(p)z_2(p) - L_{12}^2 p^2]^{-1} \times \\ &\times \left\{ z_1(p)E_2(p) + L_{12} p E_1(p) + [z_1(p) - L_{12}^2 p]i_{20} + \right. \\ &\left. + L_{12}[p - z_1(p)]i_{10} - [z_1(p)/C_2 p]q_{20} - (L_{12}/C_1)q_{10} \right\}. \end{aligned}$$

Складнощі знаходження оригіналів пов'язана з необхідністю знаходження коренів алгебраїчного рівняння четвертого степеню

$$z_1(p)z_2(p) - L_{12}^2 p^2 = 0.$$

Його аналітичний розв'язок можливий лише у деяких частинних випадках, наприклад, при відсутності у елементарних кіл ємностей. Уникнути розв'язання зазначеного алгебраїчного рівняння можна при розгляді усталеного струму для гармонійних електрорушійних сил. Фактично мова йде про використання інтегрального перетворення Фур'є. Якщо зображення струмів за Лапласом відомі, то перейти до зображень струмів за Фур'є дуже просто. Треба покласти  $i_{10} = i_{20} = q_{10} = q_{20} = 0$  і замінити  $p$  на  $-i\omega$ . Відповідні Фур'є – образи будуть наступними



$$I_1(p) = \frac{z_1(-i\omega)E_1(\omega) - iL_{12}\omega E_2(\omega)}{z_1(-i\omega)z_2(-i\omega) + L_{12}^2\omega^2},$$

$$I_2(p) = \frac{z_1(-i\omega)E_2(\omega) - iL_{12}\omega E_1(\omega)}{z_1(-i\omega)z_2(-i\omega) + L_{12}^2\omega^2}.$$

У разі гармонійних е.р.с.

$$E_1(t) = E_{11} \cos(\omega_1 t) - E_{12} \sin(\omega_1 t),$$

$$E_2(t) = E_{21} \cos(\omega_2 t) - E_{22} \sin(\omega_2 t).$$

Відповідно

$$E_1(\omega) = \pi E_{11} [\delta(\omega - \omega_1) + \delta(\omega + \omega_1)] - i\pi E_{12} [\delta(\omega - \omega_1) - \delta(\omega + \omega_1)],$$

$$E_2(\omega) = \pi E_{21} [\delta(\omega - \omega_2) + \delta(\omega + \omega_2)] - i\pi E_{22} [\delta(\omega - \omega_2) - \delta(\omega + \omega_2)].$$

Тепер ustalений струм матиме вигляд

$$\begin{aligned} i_1(t) = & \frac{E_{11}}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z_2(-i\omega) [\delta(\omega - \omega_1) + \delta(\omega + \omega_1)]}{z_1(-i\omega)z_2(-i\omega) + L_{12}^2\omega^2} \exp(-i\omega t) d\omega - \\ & - i \frac{E_{12}}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \omega \frac{z_2(-i\omega) [\delta(\omega - \omega_1) + \delta(\omega + \omega_1)]}{z_1(-i\omega)z_2(-i\omega) + L_{12}^2\omega^2} \exp(-i\omega t) d\omega - \\ & - iL_{12} \frac{E_{21}}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z_2(-i\omega) [\delta(\omega - \omega_1) + \delta(\omega + \omega_1)]}{z_1(-i\omega)z_2(-i\omega) + L_{12}^2\omega^2} \exp(-i\omega t) d\omega - \\ & - iL_{12} \frac{E_{22}}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \omega \frac{z_2(-i\omega) [\delta(\omega - \omega_1) + \delta(\omega + \omega_1)]}{z_1(-i\omega)z_2(-i\omega) + L_{12}^2\omega^2} \exp(-i\omega t) d\omega. \end{aligned}$$

Струм  $i_2(t)$  отримується з останнього виразу заміною індексів  $1 \rightarrow 2$ ,  $2 \rightarrow 1$ . Наявність дельта-функції під знаком інтегралів дозволяє їх легко обчислити. Тепер

$$\begin{aligned} i_1(t) = & E_{11} \operatorname{Re} \left[ \frac{z_2(-i\omega_1)}{z_1(-i\omega_1)z_2(-i\omega_1) + L_{12}^2\omega_1^2} \exp(-i\omega_1 t) \right] + \\ & + E_{12} \operatorname{Im} \left[ \frac{z_2(-i\omega_1)}{z_1(-i\omega_1)z_2(-i\omega_1) + L_{12}^2\omega_1^2} \exp(-i\omega_1 t) \right] + \\ & + L_{12} E_{21} \operatorname{Im} \left[ \frac{z_2(-i\omega_2)}{z_1(-i\omega_2)z_2(-i\omega_2) + L_{12}^2\omega_2^2} \exp(-i\omega_2 t) \right] + \\ & + L_{12} E_{22} \operatorname{Im} \left[ \frac{z_2(-i\omega_2)}{z_1(-i\omega_2)z_2(-i\omega_2) + L_{12}^2\omega_2^2} \exp(-i\omega_2 t) \right]. \end{aligned}$$

Аналогічний вигляд має і  $i_2(t)$ . Струм у кожному з елементарних кіл є суперпозицією двох гармонійних коливань з частотами зовнішніх е.р.с.  $\omega_1$  і  $\omega_2$ . Видно, що існує глибока аналогія між коливаннями двох кульок, з'єднаних пружиною, і коливаннями струмів в елементарних електричних колах, між якими існує індуктивний зв'язок. Зауважимо, що у разі гармонійних е.р.с. ustalений струм завжди може бути представленим у вигляді, що не містить інтегралів.

## 2.4. Рівняння Даламбера

Розв'язок рівняння Даламбера для потенціалів, створюваних рухомими зарядами і струмами, належить до фундаментальних результатів теоретичної фізики, тому розглянемо його максимально ґрунтовно, використовуючи і перетворення Лапласа, і перетворення Фур'є.

**Інтегральне перетворення Фур'є.** Рівняння для електромагнітних потенціалів  $\varphi(\mathbf{r}, t)$  і  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ , що залежать від координат та часу, такі:

$$\Delta\varphi(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = -4\pi\rho(\mathbf{r}, t),$$

$$\Delta\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = -4\pi\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = 0.$$

Тут  $c$  - швидкість світла,  $\Delta$  - оператор Лапласа. надалі ми використовуватимемо його у Декартовій системі координат

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Зазначимо, що наведені рівняння не містять обмежень на швидкість зарядженої частинки, крім умови, що вона не перевищує швидкості світла.

Якщо система не має чітко окреслених меж, а саме такий випадок ми розглянемо далі, то для розв'язку можна застосувати метод інтегральних перетворень. Сталість коефіцієнтів системи рівнянь звужує коло таких перетворень до перетворень Фур'є та Лапласа. Вибір між ними цілком зумовлюється додатковими умовами для шуканих потенціалів.

Розглянемо обидва випадки і почнемо з інтегрального перетворення Фур'є. У цьому разі межові умови можна сформулювати у вигляді достатніх умов існування прямого перетворення Фур'є або узагальненого перетворення Фур'є. Ще однією умовою при використанні перетворення Фур'є має бути умова причинності. Її сенс полягає у тому, що причина завжди передує наслідку. Умови щодо координатної залежності всіх функцій задачі мають простий фізичний зміст. Вони означають, що електромагнітні потенціали досить швидко спадають з відстанню. Останнє можливо, наприклад, для заряду та створюваного ним струму, що займають скінчену область простору, або їх густин, що досить швидко спадають до нуля при прямуванні відстані до нескінченості. Ці умови гарантують скінченність повного заряду системи та скінченність струму, створюваному скінченим зарядом, що рухається із скінченною швидкістю. Не важко зрозуміти і умови існування перетворення Фур'є за часовою змінною.

Пряме перетворення Фур'є за координатами і часом (для простоти ми їх об'єднали) для всіх обговорюваних вище функцій має вигляд:

$$\varphi(\mathbf{r}, t) := \varphi(\mathbf{k}, \omega),$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) := \mathbf{A}(\mathbf{k}, \omega),$$

$$\rho(\mathbf{r}, t) := \rho(\mathbf{k}, \omega),$$

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) := \mathbf{j}(\mathbf{k}, \omega);$$

Тут для перетворення Фур'є ми використали символічне позначення

$$f(\mathbf{r}, t) := f(\mathbf{k}, \omega)$$

яке означає або обернене перетворення Фур'є

$$f(\mathbf{r}, t) := \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} \int f(\mathbf{k}, \omega) \exp[i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)] d\mathbf{k} d\omega$$

або пряме перетворення Фур'є

$$f(\mathbf{k}, \omega) := \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} \int f(\mathbf{r}, t) \exp[-i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)] d\mathbf{r} dt .$$

Розглянемо тепер Фур'є-образи результатів дії ряду диференційних операторів на шукані потенціали:

$$\begin{aligned} \text{grad } \varphi(\mathbf{r}, t) &:= i\mathbf{k}\varphi(\mathbf{k}, \omega), \\ \text{div } \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &:= i\mathbf{k}\mathbf{A}(\mathbf{k}, \omega), \\ \text{rot } \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &:= i[\mathbf{k} \times \mathbf{A}(\mathbf{k}, \omega)], \\ \Delta \varphi(\mathbf{r}, t) &:= -\mathbf{k}^2 \varphi(\mathbf{k}, \omega), \\ \Delta \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &:= -\mathbf{k}^2 \mathbf{A}(\mathbf{k}, \omega), \\ \frac{\partial^2 \varphi(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} &:= -\omega^2 \varphi(\mathbf{k}, \omega), \\ \frac{\partial^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} &:= -\omega^2 \mathbf{A}(\mathbf{k}, \omega). \end{aligned}$$

Всі останні співвідношення досить легко доводяться інтегруванням частинами. Найпростіше це зробити, якщо використати наступний символічний вираз для векторного диференційного оператора набла

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}$$

У цьому разі існують такі символічні позначення

$$\text{grad } \varphi(\mathbf{r}, t) = \nabla \varphi(\mathbf{r}, t),$$

де градієнт скалярної функції є добутком векторного оператора набла на скалярну функцію, а дивергенція векторної функції є скалярним добутком векторного оператора набла на векторну функцію

$$\text{div } \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \nabla \mathbf{A}(\mathbf{r}, t).$$

Відповідно ротор векторної функції є векторним добутком векторного оператора набла на векторну функцію

$$\text{rot } \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) := [\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)].$$

*Нарешті, оператор Лапласа є квадратом векторного оператора набла*

$$\Delta = \nabla^2.$$

У висліді виконаних перетворень система рівнянь буде такою:

$$(\mathbf{k}^2 - \omega^2 / c^2) \varphi(\mathbf{k}, \omega) = 4\pi \rho(\mathbf{k}, \omega),$$

$$(\mathbf{k}^2 - \omega^2 / c^2) \mathbf{A}(\mathbf{k}, \omega) = 4\pi \mathbf{j}(\mathbf{k}, \omega) / c,$$

$$\mathbf{k}\mathbf{A}(\mathbf{k}, \omega) + \omega \varphi(\mathbf{k}, \omega) / c = 0.$$

Перші два з отриманих рівнянь визначають Фур'є-образи потенціалів через Фур'є-образи густин заряду та струму. Оскільки останні не є незалежними величинами, то третє рівняння якраз і встановлює цей зв'язок. Отже Фур'є-образи шуканих потенціалів мають вигляд:

$$\varphi(\mathbf{k}, \omega) = 4\pi \frac{\rho(\mathbf{k}, \omega)}{\mathbf{k}^2 - \omega^2 / c^2},$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{4\pi}{c} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{k}, \omega)}{\mathbf{k}^2 - \omega^2 / c^2}.$$

Підстановка останніх двох виразів у третє рівняння системи наступним чином пов'язує між собою Фур'є-образи густин заряду та струму:

$$\mathbf{kj}(\mathbf{k}, \omega) + \omega\rho(\mathbf{k}, \omega) = 0.$$

Відповідно, для оригіналів цих функцій матимемо:

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{c^2}{4\pi^3} \int d\mathbf{k} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho(\mathbf{k}, \omega)}{k^2 c^2 - \omega^2} \exp[i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)] d\omega,$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{c}{4\pi^3} \int d\mathbf{k} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{k}, \omega)}{k^2 c^2 - \omega^2} \exp[i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)] d\omega.$$

Таким чином, ми отримали розв'язок рівнянь Даламбера для обговорюваних вище межових умов. Цей розв'язок можна дещо спростити, перейшовши від інтегрування за хвильовим вектором та частотою до інтегрування за радіусом-вектором та часом. Досить легко виконати інтегрування за частотою аналітично продовживши підінтегральну функцію у комплексну площину  $\omega$ . Дійсно, інтеграл за частотою можна представити у вигляді

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho(\mathbf{k}, \omega)}{k^2 c^2 - \omega^2} \exp(-i\omega t) d\omega =$$

$$= \frac{1}{2ck} \int_{-\infty}^{\infty} \rho(\mathbf{k}, \omega) \left[ \frac{1}{\omega + kc} - \frac{1}{\omega - kc} \right] \exp(-i\omega t) d\omega =$$

$$= \frac{1}{2ck} \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \rho(\mathbf{k}, t') \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{\omega + kc + i\delta} - \frac{1}{\omega - kc + i\delta} \right] \exp[i\omega(t' - t)] d\omega.$$

Інтегранда внутрішнього інтегралу має особливості на дійсній осі - полюси першого порядку. Фізичною причиною появи особливостей на дійсній осі є нехтування затуханням відгуку з часом за рахунок дисипації енергії системи, яка для реальних системах завжди має місце. З математичної точки зору дисипація якраз і зміщує особливі точки у комплексну площину. Отже, щоб надати нашому інтегралу конкретний і математичний, і фізичний сенс, можна змістити особливі точки у комплексну площину на нескінченно малу відстань від дійсної осі, компенсуючи цим певну недосконалість вихідної моделі процесу. При цьому, на перший погляд, виникають два варіанти такого зміщення. Їх можна змістити як у верхню півплощину, так і у нижню. Розглянемо ці варіанти детальніше. Для  $t' > t$  інтегранда експоненційно затухає у верхній півплощині комплексної площини  $\omega$ , задовольняючи при цьому умовам леми Жордана. Останнє означає, що інтеграл за півколом нескінченно великого радіусу у верхній півплощині з центром у початку координат дорівнює нулю. Доповнивши цим півколом дійсну вісь до замкненого контуру ми отримаємо можливість застосувати до обчислення даного інтегралу теорему про лишки. При зміщенні особливих точок у нижню півплощину всередину зазначеного контуру особливі точки не потрапляють і інтеграл за замкненим контуром, а також і інтеграл вздовж дійсної осі дорівнюють нулю. Оскільки момент часу  $t$  відповідає моменту спостереження дії поля, а момент часу  $t'$  - моменту дії чинників, що викликають поле, то умова  $t' > t$  є умовою передування наслідків щодо причин, тобто передуючим відгуком на збурення. Отже, передуючий відгук, що визначається обговорюваним інтегралом, дорівнює нулю. Для  $t' < t$  ситуація інша. Тепер інтегранда експоненційно затухає у нижній комплексній півплощині  $\omega$ . Умова  $t' < t$  є умовою загаяного відгуку системи на збурення, тобто такого, що цілком відповідає принципу причинності. Змістивши особливі точки з дійсної осі у нижню комплексну півплощину, ми робимо відмінним від нуля потенціали у моменти часу  $t' < t$  і рівними їх нулю за умови  $t' > t$ . Таким чином, довільність зміщення особливих точок у комплексну площину зникає при використанні принципу причинності. Оскільки при умові  $t' < t$  інтегранда задовольняє умовам леми Жордана у нижній півплощині, то інтеграл за півколом нескінченно великого радіусу у нижній півплощині з центром у початку координат дорівнює нулю. Доповнивши цим півколом дійсну вісь, ми отримаємо замкнений контур, всередині якого є дві особливі точки

$\omega_{1,2} = \pm kc - i\delta$ . Тепер до інтегралу за замкненим контуром, фактично, для інтегралу вздовж дійсної осі, можна застосувати теорему про лишки, відповідно до якої

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{\omega + kc + i\delta} - \frac{1}{\omega - kc + i\delta} \right] \exp[i\omega(t'-t)] d\omega = \\ = 2\pi i \operatorname{res} \left[ \frac{\exp[i\omega(t'-t)]}{\omega + kc + i\delta}, -ck - i\delta \right] - \\ - 2\pi i \operatorname{res} \left[ \frac{\exp[i\omega(t'-t)]}{\omega - kc + i\delta}, ck - i\delta \right] = 4\pi \sin[kc(t'-t)]. \end{aligned}$$

Цей же результат можна отримати формальним застосуванням операторної формули Сохоцького. Отже,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho(\mathbf{k}, \omega)}{k^2 c^2 - \omega^2} \exp(-i\omega t) d\omega = \frac{2\pi}{ck} \int_{-\infty}^t \rho(\mathbf{k}, t') \sin[kc(t'-t)] dt'.$$

Відповідні вирази для інтегралів матимуть вигляд:

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}, t) &= -\frac{c}{2\pi^2} \int_{-\infty}^t dt' \int \rho(\mathbf{k}, t') \frac{\sin[ck(t'-t)]}{k} \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}) d\mathbf{k}, \\ \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= -\frac{1}{2\pi^2} \int_{-\infty}^t dt' \int \mathbf{j}(\mathbf{k}, t') \frac{\sin[ck(t'-t)]}{k} \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}) d\mathbf{k}. \end{aligned}$$

Замінімо тепер інтегрування за хвильовим вектором інтегруванням за радіусом-вектором. Для цього розглянемо інтеграл

$$\begin{aligned} \int \rho(\mathbf{k}, t') \frac{\sin[ck(t'-t)]}{k} \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}) d\mathbf{k} = \\ = \int d\mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}', t') \int \frac{\sin[ck(t'-t)]}{k} \exp[i\mathbf{k}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')] d\mathbf{k} \end{aligned}$$

Внутрішній інтеграл обчислимо у сферичних координатах, для яких

$$\int d\mathbf{k} = \int_0^{\infty} dk k^2 \int_0^{\pi} d\theta \sin(\theta) \int_0^{2\pi} d\phi.$$

Оскільки інтегранда не залежить від  $\phi$  то відповідний інтеграл обчислюється елементарно

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin[ck(t'-t)]}{k} \exp[i\mathbf{k}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')] d\mathbf{k} = \\ = 2\pi \int_0^{\infty} dk k \sin[ck(t'-t)] \int \exp[ik |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \cos(\theta)] \sin(\theta) d\theta. \end{aligned}$$

Легко обчислюється і інтеграл за кутом  $\theta$

$$\int_0^{\pi} \sin(\theta) \exp[ik |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \cos(\theta)] d\theta = 2 \frac{\sin(k |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{k |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}.$$

Відповідно

$$\int_0^{\infty} \sin[ck(t'-t)] \sin(k |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) dk =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \cos[k|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|-c(t'-t)] dk - \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \cos[k|\mathbf{r}-\mathbf{r}'+c(t'-t)] dk.$$

Оскільки дельта-функція Дірака має наступне інтегральне представлення

$$\delta(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos(kx) dk,$$

то остаточний результат для відповідного інтегралу матиме вигляд

$$\begin{aligned} & \int \rho(\mathbf{k}, t') \frac{\sin[ck(t'-t)]}{k} \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}) d\mathbf{k} = \\ & = 2\pi^2 \int \frac{\rho(\mathbf{k}, t')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \{ \delta[|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|-c(t'-t)] - \delta[|\mathbf{r}-\mathbf{r}'+c(t'-t)] \} d\mathbf{r}'. \end{aligned}$$

Тепер вираз для скалярного потенціалу міститиме інтеграл за трьома просторовими координатами та часом. Останній інтеграл можна легко обчислити, скориставшись наявністю під знаком інтегралу дельта-функцій. При цьому лише для однієї з дельта-функцій її сингулярність належить області інтегрування  $t' < t$ . Остаточно матимемо

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d\mathbf{r}'.$$

Аналогічний результат матимемо і для векторного потенціалу

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d\mathbf{r}'.$$

Ці формули дають загальний відгук потенціалів електричних полів у даний момент часу на заряди і струми у попередні моменти часу. Якби ми змістили особливі точки з дійсної осі у верхню півплощину, то отримали б передуючі відгуки:

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t + |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d\mathbf{r}',$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t + |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d\mathbf{r}'.$$

**Інтегральне перетворення Лапласа.** Принцип причинності можна врахувати в автоматично, якщо замість перетворення Фур'є за часом використати перетворення Лапласа. Оскільки принцип причинності безпосередньо закладений у перетворення Лапласа, то додатково його врахувати, як у разі перетворення Фур'є не потрібно. Тепер обмеження на часову поведінку потенціалів та густин заряду та струму будуть наступними:

$$\varphi(\mathbf{r}, 0) = 0,$$

$$\dot{\varphi}_t(\mathbf{r}, 0) = 0,$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, 0) = 0,$$

$$\mathbf{A}'_t(\mathbf{r}, 0) = 0.$$

Не зменшуючи загальності висновків, цілком можна вважати, що потенціали і швидкості їх змін у початковий момент часу дорівнюють нулю. Обмеження на координатну поведінку всіх функцій будуть такими ж як і раніше. Обернене перетворення Фур'є за координатами для всіх обговорюваних вище функцій має вигляд:

$$\varphi(\mathbf{r}, t) := \varphi(\mathbf{k}, t),$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) := \mathbf{A}(\mathbf{k}, t),$$

$$\rho(\mathbf{r}, t) := \rho(\mathbf{k}, t),$$

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) := \mathbf{j}(\mathbf{k}, t),$$

$$\rho_0(\mathbf{r}) := \rho_0(\mathbf{k}),$$

$$\mathbf{j}_0(\mathbf{r}) := \mathbf{j}_0(\mathbf{k}),$$

$$\rho(\mathbf{k}, t) := \rho(\mathbf{r}, t),$$

$$\mathbf{j}(\mathbf{k}, t) := \mathbf{j}(\mathbf{r}, t).$$

Тут для позначення прямого та оберненого перетворень Фур'є використовуються попередні означення.

Після застосування до вихідної системи рівнянь перетворення Фур'є, вона набере вигляду:

$$\left( \mathbf{k}^2 + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \varphi(\mathbf{k}, t) = 4\pi \rho(\mathbf{k}, t),$$

$$\left( \mathbf{k}^2 + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{A}(\mathbf{k}, t) = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}(\mathbf{k}, t),$$

$$i\mathbf{k}\mathbf{A}(\mathbf{k}, t) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \varphi(\mathbf{k}, t) = 0.$$

Виконаємо тепер інтегральне перетворення Лапласа:

$$\varphi(\mathbf{k}, t) =: \varphi(\mathbf{k}, p),$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{k}, t) =: \mathbf{A}(\mathbf{k}, p),$$

$$\rho(\mathbf{k}, t) =: \rho(\mathbf{k}, p),$$

$$\mathbf{j}(\mathbf{k}, t) =: \mathbf{j}(\mathbf{k}, p).$$

Лаплас-образи других похідних мають вигляд:

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi(\mathbf{k}, t) =: p \varphi(\mathbf{k}, p),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \varphi(\mathbf{k}, t) =: p^2 \varphi(\mathbf{k}, p),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{A}(\mathbf{k}, t) =: p^2 \mathbf{A}(\mathbf{k}, p).$$

Після підстановки цих співвідношень у вихідну систему рівнянь маємо:

$$(\mathbf{k}^2 + p^2 / c^2) \varphi(\mathbf{k}, p) = 4\pi \rho(\mathbf{k}, p),$$

$$(\mathbf{k}^2 + p^2 / c^2) \mathbf{A}(\mathbf{k}, p) = 4\pi \mathbf{j}(\mathbf{k}, p) / c,$$

$$i\mathbf{k}\mathbf{A}(\mathbf{k}, p) - p \varphi(\mathbf{k}, p) / c = 0.$$

Звідси можна знайти Фур'є та Лаплас-образи шуканих потенціалів, а саме:

$$\varphi(\mathbf{k}, p) = 4\pi \frac{\rho(\mathbf{k}, p)}{k^2 + p^2 / c^2},$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{k}, p) = \frac{4\pi}{c} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{k}, p)}{k^2 + p^2 / c^2}.$$

Відповідно, для оригіналів цих функцій матимемо:

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{c^2}{4\pi^3 i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \int \frac{\rho(\mathbf{r}, t)}{k^2 c^2 + p^2} \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}) \exp(pt) d\mathbf{k} dp$$

Під знаком інтегралу перейдемо від Фур'є та Лаплас-образів до оригіналів густин заряду та струму:

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{c^2}{4\pi^3 i} \int d\mathbf{r}' \int_0^\infty dt' \rho(\mathbf{r}', t') \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} dp \exp[p(t-t')] \int \frac{\exp[i\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')] }{k^2 c^2 + p^2} d\mathbf{k},$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{c}{4\pi^3 i} \int d\mathbf{r}' \int_0^\infty dt' \mathbf{j}(\mathbf{r}', t') \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} dp \exp[p(t-t')] \int \frac{\exp[i\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')] }{k^2 c^2 + p^2} d\mathbf{k}.$$

Внутрішні інтеграли за змінною  $p$  в останніх двох виразах легко обчислюються за допомогою теореми про лишки, оскільки інтегранда має два полюси першого порядку в токах  $p = \pm ikc$ . У висліді

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} dp \exp[p(t-t')] \int \frac{\exp[i\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')] }{k^2 c^2 + p^2} d\mathbf{k} = \\ & = \text{res} \left\{ \exp[p(t-t')] \int \frac{\exp[i\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')] }{k^2 c^2 + p^2} d\mathbf{k}, ikc \right\} + \\ & + \text{res} \left\{ \exp[p(t-t')] \int \frac{\exp[i\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')] }{k^2 c^2 + p^2} d\mathbf{k}, -ikc \right\} = \\ & = \int \sin[kc(t-t')] \frac{\exp[i\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')] }{kc} d\mathbf{k}. \end{aligned}$$

Внутрішній інтеграл за хвильовим вектором, що залишився, легко обчислюється у сферичній системі координат. Дійсно,

$$\begin{aligned} & \int \sin[kc(t-t')] \frac{\exp[i\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')] }{kc^2} d\mathbf{k} = \\ & = \frac{4\pi}{c |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \int \sin[kc(t-t')] \exp(ik |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|) dk = \\ & = \frac{2\pi}{c |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \int_0^\infty \{ \cos[k(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| - c(t-t'))] - \cos[k(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| + c(t-t'))] \} dk = \\ & = \frac{2\pi^2}{c |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \{ \delta[|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| - c(t-t')] - \delta[|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| + c(t-t')] \}, \end{aligned}$$

де ми використали одне з можливих представлень дельта-функції, а саме

$$\delta(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos(kx) dk.$$

У висліді, вирази для потенціалів матимуть вигляд:

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d\mathbf{r}',$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d\mathbf{r}'.$$

що у точності збігається з результатом, отриманим за допомогою перетворення Фур'є. Нагадаємо, що при цьому нам не потрібно робити додаткове припущення щодо загального характеру потенціалів полів. Це припущення автоматично враховується самим фактом використання перетворення Лапласа. Таким чином, велика кількість задач математичної фізики може з однаковим успіхом бути розв'язаною як використанням перетворення Фур'є, так і перетворення Лапласа.



## 2.5. Рівняння Клайна

Рівняння для електромагнітних потенціалів  $\varphi(\mathbf{r}, t)$  і  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ , що залежать від координат та часу, мають вигляд

$$\Delta\varphi(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} - k_0^2 \varphi(\mathbf{r}, t) = -4\pi\rho(\mathbf{r}, t).$$

Тут  $c$  і  $k_0$  - довільні сталі,  $\varphi(\mathbf{r}, t)$  скалярний потенціал поля,  $\rho(\mathbf{r}, t)$  - густина джерела поля,  $\Delta$  - оператор Лапласа. Нами буде надалі використане його представлення у Декартовій системі координат.

Рівняння Клайна (Klein<sup>5</sup>) є подальшим узагальненням рівняння Даламбера і має досить широке використання, особливо у теорії ядерних сил. Якщо рівняння Даламбера зручне для опису електромагнітного поля, квантами якого є фотони з нульовою масою спокою, то рівняння Клейна описує поле, квантами якого є частинки із скінченою масою спокою. Це можуть бути, наприклад, мезони у теорії ядерних сил. У цьому разі  $c$  - швидкість світла,  $k_0$  - маса частинки, з точністю до сталого розмірного множника.

Якщо система не має чітко окреслених меж, то для розв'язку задачі можна застосувати метод інтегральних перетворень. Сталість коефіцієнтів системи рівнянь звужує коло таких перетворень до перетворень Фур'є та Лапласа. Вибір між ними цілком зумовлюється додатковими межовими та початковими умовами для шуканих потенціалів.

Розглянемо більш простий випадок інтегрального перетворення Фур'є. Тоді додаткові межові умови можна сформулювати у вигляді достатніх умов існування прямого інтегрального перетворення Фур'є.

Пряме перетворення Фур'є за координатами і часом (для простоти ми їх об'єднали) для всіх обговорюваних вище функцій має вигляд:

$$\begin{aligned}\varphi(\mathbf{r}, t) &:= \varphi(\mathbf{k}, \omega), \\ \rho(\mathbf{r}, t) &:= \rho(\mathbf{k}, \omega).\end{aligned}$$

Оскільки:

$$\begin{aligned}\Delta\varphi(\mathbf{r}, t) &:= -\mathbf{k}^2\varphi(\mathbf{k}, \omega), \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi(\mathbf{r}, t) &:= -\omega^2\varphi(\mathbf{k}, \omega),\end{aligned}$$

то система вихідних рівнянь набере вигляду:

$$(\mathbf{k}^2 - \omega^2 / c^2 + k_0^2)\varphi(\mathbf{k}, \omega) = 4\pi\rho(\mathbf{k}, \omega).$$

Отже, Фур'є-образ шуканого потенціалу має вигляд

$$\varphi(\mathbf{k}, \omega) = 4\pi \frac{\rho(\mathbf{k}, \omega)}{\mathbf{k}^2 - \omega^2 / c^2 + k_0^2}.$$

Відповідно, для оригіналу цієї функції матимемо

$$\varphi(\mathbf{r}, t) := \frac{1}{4\pi^3} \int \int \frac{\rho(\mathbf{k}, \omega)}{\mathbf{k}^2 - \omega^2 / c^2 + k_0^2} \exp[i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)] d\mathbf{k} d\omega.$$

Таким чином, ми отримали розв'язок рівнянь Клайна для обговорюваних вище межових умов. Цей розв'язок дещо спрощується при переході від інтегрування за хвильовим вектором та частотою до інтегрування за радіус-вектором та часом

<sup>5</sup> Клайн Фелікс (25.04.1849-22.06.1925) - німецький математик

$$\int \frac{\rho(\mathbf{k}, \omega)}{\mathbf{k}^2 - \omega^2 / c^2 + k_0^2} \exp[i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)] d\omega =$$

$$= \int_{-\infty}^t dt' \rho(\mathbf{k}, t') \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp[i\omega(t-t')]}{\mathbf{k}^2 - \omega^2 / c^2 + k_0^2} d\omega.$$

Внутрішній інтеграл обчислюється аналогічно як і у разі рівняння Даламбера, тому запишемо відразу остаточний результат

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{c}{2\pi^2} \int_{-\infty}^t dt' \int \rho(\mathbf{k}, t') \frac{\sin\left[c\sqrt{k^2 + k_0^2}(t'-t)\right]}{\sqrt{k^2 + k_0^2}} \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}) d\mathbf{k}.$$

Замінімо тепер інтегрування за хвильовим вектором інтегруванням за радіус-вектором. Для цього розглянемо інтеграл

$$\int \rho(\mathbf{k}, t') \frac{\sin\left[c\sqrt{k^2 + k_0^2}(t'-t)\right]}{\sqrt{k^2 + k_0^2}} \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}) d\mathbf{k} =$$

$$= \int d\mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}', t') \int \frac{\sin\left[c\sqrt{k^2 + k_0^2}(t'-t)\right]}{\sqrt{k^2 + k_0^2}} \exp[i\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')] d\mathbf{k}.$$

Тепер

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{c}{2\pi^2} \int_{-\infty}^t dt' \int d\mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}', t') \times$$

$$\times \int \frac{\sin\left[c\sqrt{k^2 + k_0^2}(t'-t)\right]}{c\sqrt{k^2 + k_0^2}} \exp[i\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')] d\mathbf{k}.$$

Внутрішній інтеграл доцільно обчислювати у сферичних координатах. Оскільки інтегранда не залежить від  $\varphi$ , то відповідний інтеграл обчислюється елементарно

$$I = \frac{c}{2\pi^2} \int \frac{\sin\left[c\sqrt{k^2 + k_0^2}(t'-t)\right]}{c\sqrt{k^2 + k_0^2}} \exp[i\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')] d\mathbf{k} =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dk k^2 \frac{\sin\left[c\sqrt{k^2 + k_0^2}(t'-t)\right]}{\sqrt{k^2 + k_0^2}} \int_0^{\pi} \exp[ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|\cos(\theta)] \sin(\theta) d\theta.$$

Легко обчислюється і інтеграл за кутом  $\theta$

$$\int_0^{\pi} \sin(\theta) \exp[ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|\cos(\theta)] d\theta = 2 \frac{\sin(k|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)}{k|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}.$$

Відповідно, враховуючи парність інтегранди,

$$I = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} dk \frac{\sin\left[c\sqrt{k^2 + k_0^2}(t'-t)\right]}{\sqrt{k^2 + k_0^2}} \frac{\sin(k|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)}{k|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} k^2 dk =$$

$$= \frac{1}{\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\left[c\sqrt{k^2+k_0^2}(t'-t)\right]}{\sqrt{k^2+k_0^2}} \sin(k|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|) k dk$$

Подальше спрощення інтегралу досягається такою підстановкою

$$k = k_0 \sinh(\varphi).$$

Використавши наступну тотожність для гіперболічних функцій:

$$\cosh^2(\varphi) - \sinh^2(\varphi) = 1,$$

останньому інтегралу можна надати вигляду

$$I = \frac{k_0}{\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \int_{-\infty}^{\infty} \sin[c(t'-t)k_0 \cosh(\varphi)] \sin[|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|k_0 \sinh(\varphi)] \sinh(\varphi) d\varphi.$$

Інтеграл набуває більш симетричного вигляду, якщо ввести позначення:

$$c|t-t'| = \sqrt{c^2|t-t'|^2 - |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2} \cosh(\varphi_0),$$

$$|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| = \sqrt{c^2|t-t'|^2 - |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2} \sinh(\varphi_0),$$

якщо  $c|t-t'| > |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$ , і

$$c|t-t'| = \sqrt{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2 - c^2|t-t'|^2} \sinh(\varphi_0),$$

$$|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| = \sqrt{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2 - c^2|t-t'|^2} \cosh(\varphi_0),$$

якщо  $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| > c|t-t'|$ . Якщо ж  $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| = c|t-t'|$ , то обидва підходи є рівноправними. Тоді

$$I = \frac{k_0}{\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \int_{-\infty}^{\infty} d\varphi \sinh(\varphi) \times \\ \times \sin\left[k_0 \sqrt{c^2|t-t'|^2 - |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2} \cosh(\varphi_0) \cosh(\varphi)\right] \times \\ \times \sin\left[k_0 \sqrt{c^2|t-t'|^2 - |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2} \sinh(\varphi_0) \sinh(\varphi)\right]$$

для  $c|t-t'| > |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$ , і

$$I = \frac{k_0}{\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \int_{-\infty}^{\infty} d\varphi \sinh(\varphi) \times \\ \times \sin\left[k_0 \sqrt{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2 - c^2|t-t'|^2} \sinh(\varphi_0) \cosh(\varphi)\right] \times \\ \times \sin\left[k_0 \sqrt{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2 - c^2|t-t'|^2} \cosh(\varphi_0) \sinh(\varphi)\right]$$

для  $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| \geq c|t-t'|$ . Для подальшого використаємо наступні тригонометричні рівності:

$$\cos(\varphi_1 \pm \varphi_2) = \cos(\varphi_1)\cos(\varphi_2) \mp \sin(\varphi_1)\sin(\varphi_2),$$

$$\cosh(\varphi_1 \pm \varphi_2) = \cosh(\varphi_1)\cosh(\varphi_2) \pm \sinh(\varphi_1)\sinh(\varphi_2),$$

$$\sin(\varphi_1 \pm \varphi_2) = \sin(\varphi_1)\cos(\varphi_2) \pm \cos(\varphi_1)\sin(\varphi_2),$$

$$\sinh(\varphi_1 \pm \varphi_2) = \sinh(\varphi_1)\cosh(\varphi_2) \pm \cosh(\varphi_1)\sinh(\varphi_2).$$

У висліді

$$I = \frac{k_0}{2\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \int_{-\infty}^{\infty} d\varphi \sinh(\varphi) \times \\ \times \left\{ \cos \left[ k_0 \sqrt{c^2|t-t'|^2 - |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2} \cosh(\varphi - \varphi_0) \right] - \right. \\ \left. - \cos \left[ k_0 \sqrt{c^2|t-t'|^2 - |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2} \cosh(\varphi + \varphi_0) \right] \right\}$$

для  $c|t-t'| > |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$ , і

$$I = \frac{k_0}{2\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \int_{-\infty}^{\infty} d\varphi \sinh(\varphi) \times \\ \times \left\{ \cos \left[ k_0 \sqrt{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2 - c^2|t-t'|^2} \sinh(\varphi - \varphi_0) \right] - \right. \\ \left. - \cos \left[ k_0 \sqrt{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2 - c^2|t-t'|^2} \sinh(\varphi + \varphi_0) \right] \right\}$$

для  $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| \geq c|t-t'|$ . Останні вирази можна записати і так:

$$I = \frac{k_0}{2\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \int_{-\infty}^{\infty} \cos \left[ k_0 \sqrt{c^2|t-t'|^2 - |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2} \cosh(\varphi) \right] \times \\ \times \left\{ \sinh(\varphi + \varphi_0) - \sinh(\varphi - \varphi_0) \right\} d\varphi$$

для  $c|t-t'| > |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$ , і

$$I = \frac{k_0}{2\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \int_{-\infty}^{\infty} \cos \left[ k_0 \sqrt{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2 - c^2|t-t'|^2} \sinh(\varphi) \right] \times \\ \times \left\{ \sinh(\varphi + \varphi_0) - \sinh(\varphi - \varphi_0) \right\} d\varphi$$

для  $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| \geq c|t-t'|$ , або

$$I = \frac{k_0}{2\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \int_{-\infty}^{\infty} \cos \left[ k_0 \sqrt{c^2|t-t'|^2 - |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2} \cosh(\varphi) \right] \times \\ \times \cosh(\varphi) \sinh(\varphi_0) d\varphi$$

для  $c|t-t'| > |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$ , і

$$I = \frac{k_0}{2\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \int_{-\infty}^{\infty} \cos \left[ k_0 \sqrt{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2 - c^2|t-t'|^2} \sinh(\varphi) \right] \times \\ \times \cosh(\varphi) \sinh(\varphi_0) d\varphi$$

для  $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| \geq c|t-t'|$ . У випадку  $c|t-t'| > |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$  можна ввести нову змінну  $x = \sinh(\varphi)$

і інтеграл набере досить простого вигляду

$$I = \frac{k_0 \sinh(\varphi_0)}{2\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(k_0 \sqrt{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2 - c^2|t-t'|^2} x) dx.$$

Якщо тепер використати одне з інтегральних представлень дельта-функції

$$\delta(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\alpha x) dx$$

то

$$I = \frac{k_0 \sinh(\varphi_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \delta(k_0 \sqrt{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2 - c^2 |t - t'|^2} x)$$

Розглянемо тепер випадок  $c |t - t'| > |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ . За допомогою диференціювання за параметром інтеграл можна записати так

$$I = \frac{k_0 \sinh(\varphi_0)}{2\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \frac{d}{d\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} \sin[\alpha \cosh(\varphi)] d\varphi,$$

де  $\alpha = k_0 \sqrt{c^2 |t - t'|^2 - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2}$ . Використовуючи одне з можливих інтегральних представлень функції Бесселя (Bessel<sup>6</sup>) нульового порядку

$$J_0(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sin[\alpha \cosh(\varphi)] d\varphi,$$

ми отримуємо наступне значення інтегралу

$$I = \frac{k_0 \sinh(\varphi_0)}{2 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \frac{d}{d\alpha} J_0(\alpha).$$

У свою чергу

$$\frac{dy}{d\alpha} J_0(\alpha) = J_1(\alpha),$$

і остаточний результат для  $c |t - t'| > |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$  буде таким

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{k_0}{2} \int_{-\infty}^t dt' \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \sinh(\varphi_0) J_1(k_0 \sqrt{c^2 |t - t'|^2 - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2}) d\mathbf{r}'.$$

Оскільки, за означенням,

$$\sinh(\varphi_0) = \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{\sqrt{c^2 |t - t'|^2 - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2}}$$

то остаточний результат можна записати і так

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{k_0}{2} \int_{-\infty}^t dt' \int \rho(\mathbf{r}', t') \frac{J_1(k_0 \sqrt{c^2 |t - t'|^2 - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2})}{\sqrt{c^2 |t - t'|^2 - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2}} d\mathbf{r}'_{ю}$$

Важливою є та обставина, що цей потенціал створюється саме частинками скінченної маси і відмінний від нуля лише для  $c |t - t'| \geq |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ . Останнє означає, що швидкість розповсюдження цього поля може бути довільною, але не вищою швидкості світла  $c$ . При цьому внесок в інтеграл за  $t'$  від околу точки  $c |t - t'| = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$  зникно малий. Якщо поле, розглядати як певне збурення, що розповсюджується у просторі, то у даному разі це збурення переноситься самими частинками. У разі  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \geq c |t - t'|$

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = k_0 \int_{-\infty}^t dt' \int \rho(\mathbf{r}', t') \frac{\sinh(\varphi_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \delta \left[ k_0 \sqrt{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2 - c^2 |t - t'|^2} \right] d\mathbf{r}'$$

або

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = k_0 \int_{-\infty}^t dt' \int \rho(\mathbf{r}', t') \frac{\delta \left[ k_0 \sqrt{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2 - c^2 |t - t'|^2} \right]}{\sqrt{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2 - c^2 |t - t'|^2}} d\mathbf{r}'.$$

<sup>6</sup> Бетель Фрідріх Вільгельм (22.07.1784-17.03.1846) - німецький астроном

Тут важливим є те, що інтеграл за  $t'$  формується найближчим околom точки  $c|t-t'| = |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$ . Це означає, з області  $c|t-t'| \leq |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$ , для якої отримано останній результат, залишається лише одна точка  $c|t-t'| = |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$ . З останнього також випливає, що поле розповсюджується із швидкістю світла, а отже не може створюватись частинками скінченої маси. Хоча і тут джерелом поля є частинки, але відповідне збурення переноситься не частинками, а самим середовищем, у якому ці частинки знаходяться.

Якщо аргументом дельта-функції у свою чергу є функція, то для обчислення інтегралу використовується наступна властивість

$$\delta[f(x)] = \frac{\delta(x-x_0)}{|df(x)/dx|},$$

де  $x_0$  є нулем функції  $f(x)$ . Якщо функція має декілька нулів, то у правій частині рівності має бути сума відповідних доданків. У цьому зв'язку

$$\delta[k_0\sqrt{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2 - c^2|t-t'|^2}] = \frac{\sqrt{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2 - c^2|t-t'|^2}}{k_0c^2|t-t'|} \delta[t'-t+|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/c], \quad t > t',$$

$$\delta[k_0\sqrt{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2 - c^2|t-t'|^2}] = \frac{\sqrt{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2 - c^2|t-t'|^2}}{k_0c^2|t-t'|} \delta[t'-t-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/c], \quad t < t'.$$

Остаточний результат можна записати у вигляді загаяного потенціалу

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d\mathbf{r}', \quad t > t'.$$

Об'єднуючи частинкову і польову складові поля у випадку загаяного потенціалу остаточний результат можна записати так

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}, t) = & \frac{k_0}{2} \int_{-\infty}^t dt' \int \rho(\mathbf{r}', t') \frac{J_1(k_0\sqrt{c^2|t-t'|^2 - |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2})}{\sqrt{c^2|t-t'|^2 - |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2}} d\mathbf{r}' + \\ & + \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d\mathbf{r}', \quad c|t-t'| \geq |\mathbf{r}-\mathbf{r}'| \end{aligned}$$

Тут, для окремої зарядженої частинки, другий доданок у правій частині описує далекосяжний потенціал, створюваний полем частинки, перший доданок - близькосяжний, створюваний самою частинкою.

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = 0, \quad c|t-t'| < |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$$

Близькосяжний характер першого доданку зумовлений наявністю під знаком інтегралу функції Бесселя, яка досить швидко спадає із зростанням відстані від частинки. Також видно, що чим більша маса частинки тим більшим буде і зазначений доданок, але і тим більш близькосяжним він буде, оскільки маса частинки входить і у якості множника перед інтегралом, і у вигляді множника в аргументі функції Бесселя. Другий доданок збігається з потенціалом, що є розв'язком рівняння Даламбера і має всі властивості кулонівського потенціалу.

## 2.6. Задачі для самостійної роботи

В області  $0 < x < l, t > 0$  розв'язати такі межові задачі:

### Варіант 1.

$$a) \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - \beta u(x, t),$$

$$u(x,0)=Ax, \quad u(0,t)=0, \quad u(l,t)=0;$$

$$b) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2},$$

$$u(x,0)=\varphi(x), \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \psi(x), \quad \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = 0;$$

$$c) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + f(x,t),$$

$$u(x,0)=\varphi(x), \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \psi(x),$$

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} + u(0,t) = 0, \quad \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} + u(l,t) = 0;$$

### Варіант 2.

$$a) \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2},$$

$$u(x,0)=A(1-x), \quad \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = 0, \quad u(l,t)=0;$$

$$b) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2},$$

$$u(x,0)=\varphi(x), \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \psi(x),$$

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} + u(0,t) = 0, \quad \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} + u(l,t) = 0;$$

$$c) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + f(x,t),$$

$$u(x,0)=\varphi(x), \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \psi(x),$$

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = 0;$$

### Варіант 3.

$$a) \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2},$$

$$u(x,0)=A(x-1), \quad u(0,t)=0, \quad \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = 0;$$

$$b) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2},$$

$$u(x,0)=\varphi(x), \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \psi(x),$$

$$u(0,t)=0, \quad \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} + u(l,t)=0;$$

$$c) \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + f(x,t),$$

$$u(x,0) = A(1-x), \quad \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = 0,$$

$$u(l,t)=0;$$

#### Варіант 4.

$$a) \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2},$$

$$u(x,0) = \varphi(x),$$

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = 0;$$

$$b) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2},$$

$$u(x,0) = A(x-1), \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0,$$

$$u(0,t)=0, \quad \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = 0;$$

$$c) \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + f(x,t),$$

$$u(x,0) = A(x-1),$$

$$u(0,t)=0, \quad \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = 0;$$

#### Варіант 5.

$$a) \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2},$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial u(l,t)}{\partial x} + u(l,t) = 0;$$

$$b) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \beta u(x,t),$$

$$u(x,0) = \varphi(x),$$

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \psi(x), \quad \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = 0;$$

$$c) \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + f(x,t),$$

$$u(x,0) = \varphi(x),$$



$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = 0;$$

**Варіант 6.**

$$a) \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2},$$

$$u(x,0) = \varphi(x),$$

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} + u(0,t) = 0, \quad \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = 0;$$

$$b) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2},$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \psi(x),$$

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} + u(l,t) = 0;$$

$$c) \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + f(x,t),$$

$$u(x,0) = \varphi(x),$$

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = 0;$$

**Варіант 7.**

$$a) \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2},$$

$$u(x,0) = \varphi(x),$$

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} + u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0;$$

$$b) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2},$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \psi(x),$$

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} + u(0,t) = 0, \quad \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = 0;$$

$$c) \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + f(x,t),$$

$$u(x,0) = \varphi(x),$$

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} + u(0,t) = 0, \quad \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = 0;$$

**Варіант 8.**

$$a) \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2},$$

$$u(x,0) = \varphi(x),$$

$$u(0,t)=0, \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} + u(l,t)=0;$$

$$b) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2},$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \psi(x),$$

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} + u(0,t) = 0, u(l,t) = 0;$$

$$c) \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + f(x,t),$$

$$u(x,0) = \varphi(x),$$

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} + u(0,t) = 0, u(l,t) = 0;$$

### Варіант 9.

$$a) \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2},$$

$$u(x,0) = \varphi(x),$$

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} + u(0,t) = 0, \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} + u(l,t) = 0;$$

$$b) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \beta u(x,t),$$

$$u(x,0) = Ax, \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0,$$

$$u(0,t) = 0, u(l,t) = 0;$$

$$c) \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + f(x,t),$$

$$u(x,0) = \varphi(x),$$

$$u(0,t) = 0, \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} + u(l,t) = 0;$$

### Варіант 10.

$$a) \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \beta u(x,t),$$

$$u(x,0) = \varphi(x),$$

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = 0, \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = 0;$$

$$b) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2},$$

$$u(x,0) = A(1-x), \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0,$$

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = 0, u(l,t) = 0.$$

$$c) \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + f(x,t),$$

$$u(x,0) = \varphi(x),$$

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} + u(0,t) = 0, \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} + u(l,t) = 0;$$

В області  $-l < x < l, t > 0$  розв'язати такі межові задачі:

### Варіант 11.

$$a) \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \beta u(x,t),$$

$$u(x,0) = Ax,$$

$$u(-l,t) = 0, u(l,t) = 0;$$

$$b) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2},$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \psi(x),$$

$$\frac{\partial u(-l,t)}{\partial x} = 0, \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = 0;$$

### Варіант 12.

$$a) \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2},$$

$$u(x,0) = A(1-x),$$

$$\frac{\partial u(-l,t)}{\partial x} = 0, u(l,t) = 0;$$

$$b) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2},$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \psi(x),$$

$$\frac{\partial u(-l,t)}{\partial x} + u(-l,t) = 0, \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} + u(l,t) = 0;$$

### Варіант 13.

$$a) \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2},$$

$$u(x,0) = A(x-1),$$

$$u(-l,t) = 0, \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = 0;$$

$$b) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2},$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \psi(x),$$

$$u(-l,t) = 0, \quad \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} + u(l,t) = 0;$$

**Варіант 14.**

$$\text{a) } \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2},$$

$$u(x,0) = \varphi(x),$$

$$\frac{\partial u(-l,t)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = 0;$$

$$\text{b) } \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2},$$

$$u(x,0) = A(x-1), \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0,$$

$$u(-l,t) = 0, \quad \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = 0;$$

**Варіант 15.**

$$\text{a) } \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2},$$

$$u(x,0) = \varphi(x),$$

$$\frac{\partial u(-l,t)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} + u(l,t) = 0;$$

$$\text{b) } \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \beta u(x,t),$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \psi(x),$$

$$\frac{\partial u(-l,t)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = 0;$$

**Варіант 16.**

$$\text{a) } \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2},$$

$$u(x,0) = \varphi(x),$$

$$\frac{\partial u(-l,t)}{\partial x} + u(-l,t) = 0, \quad \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = 0;$$

$$\text{b) } \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2},$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \psi(x),$$

$$\frac{\partial u(-l,t)}{\partial x} + u(-l,t) = 0, \quad \frac{\partial u(-l,t)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} + u(l,t) = 0;$$

**Варіант 17.**

$$\begin{aligned}
\text{a) } \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} &= a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \\
u(x,0) &= \varphi(x), \\
\frac{\partial u(-l,t)}{\partial x} + u(-l,t) &= 0, \quad u(l,t) = 0; \\
\text{b) } \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} &= a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \\
u(x,0) &= \varphi(x), \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \psi(x), \\
\frac{\partial u(-l,t)}{\partial x} + u(-l,t) &= 0, \quad \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = 0.
\end{aligned}$$

**Варіант 18.**

$$\begin{aligned}
\text{a) } \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} &= a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \\
u(x,0) &= \varphi(x), \\
u(-l,t) &= 0, \quad \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} + u(l,t) = 0; \\
\text{b) } \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} &= a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \\
u(x,0) &= \varphi(x), \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \psi(x), \\
\frac{\partial u(-l,t)}{\partial x} + u(-l,t) &= 0, \quad u(l,t) = 0.
\end{aligned}$$

**Варіант 19.**

$$\begin{aligned}
\text{a) } \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} &= a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \\
u(x,0) &= \varphi(x), \\
\frac{\partial u(-l,t)}{\partial x} + u(-l,t) &= 0, \quad \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} + u(l,t) = 0; \\
\text{b) } \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} &= a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \beta u(x,t), \\
u(x,0) &= Ax, \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0, \\
u(-l,t) &= 0, \quad u(l,t) = 0.
\end{aligned}$$

**Варіант 20.**

$$\begin{aligned}
\text{a) } \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} &= a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \beta u(x,t), \\
u(x,0) &= \varphi(x), \\
\frac{\partial u(-l,t)}{\partial x} &= 0, \quad \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = 0;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} &= a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \\ u(x,0) &= A(1-x), \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0, \\ \frac{\partial u(-l,t)}{\partial x} &= 0, \quad u(l,t) = 0. \end{aligned}$$

## Література

1. Павлова Л.В., Редькіна О.І. Теорія аналітичних функцій. Збірник вправ. Київ: Вища школа, 1980.
2. Мартыненко В.С. Операционное исчисление. Киев: Вища школа, 1990.
3. Беляев М.Н., Рядно А.А. Математические методы теплопроводности. Киев: Вища школа, 1993.
4. Вірченко Н.О., Ляшко І.І. Графіки елементарних та спеціальних функцій. Київ: Наукова думка, 1996.
5. Свідзинський А. Математичні методи теоретичної фізики. Київ: Видавництво імені Олени Теліги, 1998.
6. Вакарчук І.О. Квантова механіка. Львів: Видавництво Львівського державного університету ім. І. Франка, 1998.
7. Микусинский Ян. Операторное исчисление. Москва: Издательство иностранной литературы, 1956.
8. Гельфанд И.М., Шиллов Г.Е. Обобщенные функции и действия над ними. Москва: Государственное издательство физико-математической литературы. 1958.
9. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. Москва: Наука. 1988.
10. Овчинников П.П., Яремчук Ф.П., Михайленко В.М. Вища математика. Т. 1,2. Київ: Техніка, 1999.
11. Кошляков Н.С., Глинэр Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. Москва: Высшая школа 1970.
12. Мэтьюз Дж., Уоркер Р. Математические методы физики. Москва: Атомиздат, 1972.
13. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики, Москва: Наука, 1977.
14. Морс Ф.М., Фешбах Г. Методы теоретической физики. Том 1 и 2. -Москва: Иностранная литература, 1960.
15. Положий Г.Н. Уравнения математической физики. Москва: Высшая школа, 1964.
16. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды: специальные функции. Москва: Наука, 1983.
17. Карташов Э.М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. Москва: Высшая школа, 1985.
18. Джефрис Г., Свираш В. Методы математической физики. Том 3. Москва: Мир, 1978.
19. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. Москва: Наука, 1972.
20. Иваненко Д., Соколов А. Классическая теория поля. Москва: Государственное издательство техники - теоретической литературы, 1949.
21. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. Том 1. Москва: Наука, 1969.
22. Брычков Ю.А., Прудников А.П. Интегральные преобразования обобщенных функций. Москва: Наука, 1977.
23. Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И. Лекции по теории функций комплексного переменного. Москва: Наука, 1982.
24. Свешников А.Г., Тихонов А.Н. Теория функций комплексной переменной. Москва: Наука, 1974.
25. Швець В.Т. Спеціальні функції у задачах математичної фізики. Одеса: Видавничий центр ОДАХ, 2000.
26. Комаров Г.Н., Ленюк М.П., Мороз В.В. Скінчені гібридні інтегральні перетворення, породжені диференціальними рівняннями другого порядку. Чернівці: Видавництво Прут, 2001.
27. Ленюк М.П., Петрик М.Р. Інтегральні перетворення Фур'є, Бесселя із спектральним параметром

- у задачах математичного моделювання, масопереносу в неоднорідних середовищах. Київ: Наукова думка, 2000.
28. Изюмов Ю.А., Скрябин Ю.Н. *Статистическая механика магнито-упорядоченных систем.* Москва: Наука, 1987.
29. Чен Ф. Введение в физику плазмы. Москва: Мир, 1987.
30. Арцимович Л.А., Сагдеев Р.З. *Физика плазмы для физиков.* Москва: Атомиздат, 1979.