XI Літня школа

“Алгебра, Топологія, Аналіз”

1 – 14 серпня 2016 року

Одеса, Україна

Тези доповідей

XI Літня школа “Алгебра, Топологія, Аналіз”, 1 – 14 серпня 2016 р., Одеса, Україна: Тези доповідей. — Київ: Інститут математики НАН України, 2016. — 145 с.

Організатори Літньої школи

Одеська національна академія харчових технологій, Одеса

Інститут математики НАН України, Київ

Київський національний університет ім. Тараса Шевченка, Київ

Львівський національний університет ім. Івана Франка, Львів

Прикарпатський національний університет ім. Василя Стефаника, Івано-Франківськ

Проективная классификация кривых третьего порядка на проективной плоскости

Н. Г. Коновенко

ОНАПТ, Одесса, Украина

konovenko@ukr.net

Мы рассматриваем классификацию кривых третьего порядка на проективной плоскости относительно группы проективных преобразований $\mathbf{SL}_3(\mathbb{C})$. Это классическая задача, восходящая к И. Ньютону (см. [4]), где обсуждается подход к этой задаче с алгебраической точки зрения. Здесь мы предлагаем альтернативный подход, основанный на дифференциальной геометрии и проективных дифференциальных инвариантах. Для кривой L на проективной плоскости $\mathbb{C}\mathbf{P}^2$ обозначим через $Q_7(L)$ ее проективную кривизну, а через $Q_8 = \nabla(Q_7)$ - ее производную Штуди ([1] - [3]). Проективная кривизна кривой $Q_7(L)$ является проективным инвариантом порядка 7, а ее Штуди производная $Q_8(L)$ - инвариантом 8-го порядка.

Для алгебраических кривых инварианты $Q_7(L)$ и $Q_8(L)$ являются рациональными функциями на кривой L и поэтому существует алгебраическое соотношение между ними:

$$H(Q_7(L), Q_8(L)) = 0. \tag{1}$$

Это соотношение задаёт алгебраическую кривую на плоскости, которую мы называем *определяющей.*

В работе ([3]) доказано, что две неприводимые алгебраические плоские кривые, которые не являются прямыми линиями или квадриками, проективно эквивалентны тогда и только тогда, когда их определяющие кривые совпадают. Также показано, что кубические кривые являются решениями следующего уравнения 9-го порядка:

$$\nabla^2(Q_7)Q_7 - \frac{11}{8}(\nabla(Q_7))^2 - \frac{7}{72}Q_7\nabla(Q_7) - \frac{216}{35}Q_7^3 - \frac{49}{21600}Q_7^2 = 0. \tag{2}$$

Рассматривая это уравнение, как дифференциальное уравнение второго порядка относительно производной Штуди и интегрируя его, приходим к следующему уравнению 8-го порядка

$$F^3 + \eta G Q_7^9 = 0, \tag{3}$$

где

$$F = \frac{49}{147456}Q_8{}^4 + \frac{343}{3317760}Q_8{}^3 + \left(\frac{2401}{199065600} + \frac{7}{192}Q_7{}^3\right)Q_8{}^2 +$$
$$+\left(-\frac{49}{25920}Q_7{}^3 + \frac{16807}{26873856000}\right)Q_8 + \left(Q_7{}^3 - \frac{343}{1036800}\right)\left(Q_7{}^3 - \frac{343}{9331200}\right)$$

и

$$G = 117649 - 6401203200\,Q_7{}^3 + 18151560\,Q_8 + 583443000\,Q_8{}^2 + 87071293440000\,Q_7{}^6 -$$
$$-493807104000\,Q_7{}^3Q_8 + 3174474240000\,Q_7{}^3Q_8{}^2 + 7001316000\,Q_8{}^3 + 28934010000\,Q_8{}^4,$$

а η - константа интегрирования. При этом группа проективных преобразований действует транзитивно на пространстве решений уравнения (3) при фиксированном η.

Справедлива следующая

Теорема 1. *Две неприводимые кубические кривые проективно эквивалентны тогда и только тогда, когда константы η для них совпадают.*

[1] G. H. Halphen. Sur les invariants différentiels, Paris: Gauthier-Villars, (1878).

[2] F. Klein, W. Blaschke. Vorlesungen über höhere Geometrie, Berlin, J. Springer, (1926).

[3] N. Konovenko, V. Lychagin. On projective classifica-tion of algebraic curves// Mathematical Bulletin of Taras Shevchenko Scientific Society (2013). V.10, P. 1-14.

[4] H. Kraft. Geometrische Methoden in der Invariantentheorie // Aspects of Mathematics, D1, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, (1984). x+308 pp.