International
Scientific Conference

Algebraic and Geometric Methods of Analysis

26-30 may 2020
Odesa, Ukraine

List of topics

- Algebraic methods in geometry
- Differential geometry in the large
- Geometry and topology of differentiable manifolds
- General and algebraic topology
- Dynamical systems and their applications
- Geometric problems in mathematical analysis
- Geometric and topological methods in natural sciences

Organizers

- Ministry of Education and Science of Ukraine
- Odesa National Academy of Food Technologies
- Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine
- Odessa I. I. Mechnikov National University
- Taras Shevchenko National University of Kyiv
- International Geometry Center
- Kyiv Mathematical Society

Program Committee

Chairman: Prishlyak A.
(*Kyiv, Ukraine*)
Balan V.
(*Bucharest, Romania*)
Banakh T.
(*Lviv, Ukraine*)
Bolotov D.
(*Kharkiv, Ukraine*)
Borysenko O.
(*Kharkiv, Ukraine*)
Cherevko Ye.
(*Odesa, Ukraine*)
Fedchenko Yu.
(*Odesa, Ukraine*)
Karlova O.
(*Chernivtsi, Ukraine*)
Kiosak V.
(*Odessa, Ukraine*)
Kirillov V.
(*Odesa, Ukraine*)
Konovenko N.
(*Odesa, Ukraine*)
Lyubashenko V.
(*Kyiv, Ukraine*)
Maksymenko S.
(*Kyiv, Ukraine*)
Matsumoto K.
(*Yamagata, Japan*)
Mormul P.
(*Warsaw, Poland*)
Mykhailyuik V.
(*Chernivtsi, Ukraine*)
Plachta L.
(*Krakov, Poland*)
Pokas S.
(*Odesa, Ukraine*)
Polulyakh E.
(*Kyiv, Ukraine*)
Sabitov I.
(*Moscow, Russia*)
Savchenko A.
(*Kherson, Ukraine*)
Sergeeva A.
(*Odesa, Ukraine*)
Shelekhov A.
(*Tver, Russia*)
Volkov V.
(*Odesa, Ukraine*)
Zarichnyi M.
(*Lviv, Ukraine*)

Administrative committee

- Egorov B., chairman, rector of the ONAFT;
- Povarova N., deputy chairman, Pro-rector for scientific work of the ONAFT;
- Mardar M., Pro-rector for scientific-pedagogical work and international communications of the ONAFT;
- Fedosov S., Director of the International Cooperation Center of the ONAFT;
- Kotlik S., Director of the P.M. Platonov Educational-scientific institute of computer systems and technologies “Industry 4.0”;
- Svytyy I., Dean of the Faculty of Computer Systems and Automation.

Organizing commitee

Kirillov V.
Konovenko N.
Fedchenko Yu.
Maksymenko S.
Cherevko Ye.
Osadchuk E.
Prus A.

Аналог преобразования Лежандра в идемпотентной математике

М. В. Куркина, В. В. Славский
(Югорский государственный университет, ул. Чехова 16, Ханты-Мансийск, 628012, Россия)
E-mail: `mavi@inbox.ru, slavsky2004@mail.ru`

Известна классическая формула для преобразования Лежандра [1]:

$$f^*(p) = \max_{x \in R^n} \left[(p, x) - f(x) \right], \tag{1}$$

где R^n – евклидово n-мерное арифметическое пространство, (p, x) – скалярное произведение x, $p \in R^n$, $f(x)$ – выпуклая функция, $f^*(p)$ – двойственная к $f(x)$ или преобразование Лежандра функция $f(x)$. В работе [2] было введено аналогичное понятие для конформно-плоских метрик на единичной n-мерной сфере $S^n \subset R^{n+1}$;

$$f^*(y) = \max_{x \in S^n} \frac{\|y - x\|^2}{2f(x)}, \tag{2}$$

здесь $f(x)$ конформно-выпуклая функция на сфере [3], то есть функция для которой конформно-плоская метрика $ds^2 = \frac{dx^2}{f^2(x)}$ имеет неотрицательную одномерную секционную кривизну, $\|y - x\|$ – хордовое расстояние между точками на сфере, $f^*(y)$ $y \in S^n$ функция задающая двойственную или полярную метрику $ds^{*2} = \frac{dy^2}{f^{*2}(y)}$. В работе [5] было предложено назвать это преобразование также преобразованием Лежандра функции $f(x)$ $x \in S^n$. С вычислительной точки зрения формула (2) имеет дискретный вид;

$$f^*(y_j) = \max_{x_i \in S^n} \frac{\|y_j - x_i\|^2}{2f(x_i)}, \tag{3}$$

где $\{x_i\}$ конечная сетка точек на сфере. В данной работе предлагается абстрактное обобщение формулы (3) для идемпотентной математики.

Определение 1. Пусть $n > 1$, R_n^+ – множество наборов $f = \{f_i\}$, $i = 1, \ldots, n$ положительных чисел, $A = \|A_{ji}\|$ $i, j = 1, \ldots, n$ симметричная квадратная матрица неотрицательных чисел с нулевой диагональю. Обозначим через L_A – отображение множества R_n^+ в себя $L_A : R_n^+ \to R_n^+$ определяемое формулой $L_A[\{f_i\}] = \{f_j^*\}$, где

$$f_j^* = \max_i \frac{A_{ji}}{f_i}. \tag{4}$$

Замечание 2. В формуле (4) участвуют только две операции над неотрицательными числами умножение (деление) и max (min), с помощью функции log это множество чисел можно отождествить с идемпотентным полукольцом $R_{\max} = R \cup \{-\infty\}$ см.[6], [4].

Теорема 3. *Преобразование (4) полукольца $R_{\max} = R \cup \{-\infty\}$ обладает свойствами:*

$$f_i^{**} \le f_i, \quad f_i^{***} = f_i^* \quad i = 1, \ldots, n, \tag{5}$$

где $\{f_i^*\} = L_A[\{f_i\}]$, $\{f_i^{**}\} = L_A[\{f_i^*\}]$, $\{f_i^{***}\} = L_A[\{f_i^{**}\}]$.

Следствие 4. *В условиях теоремы 3 справедливо неравенство: $f_j^* \cdot f_i \ge A_{ji}$ – аналог неравенства Юнга—Фенхеля.*

Пример 5. Рассмотрим как выглядит L_A при $n = 3$, пусть матрица A имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{pmatrix}$$

Тогда $\{f_i^*\} = L_A[\{f_i\}]$, $\{f_i^{**}\} = L_A[\{f_i^*\}]$ имеют вид:

$$f_1^* = \max\left(\frac{a}{f_2}, \frac{b}{f_3}\right), \; f_2^* = \max\left(\frac{a}{f_1}, \frac{c}{f_3}\right), \; f_2^* = \max\left(\frac{b}{f_1}, \frac{c}{f_2}\right);$$

$$f_1^{**} = \max\left(a \min\left(\frac{f_1}{a}, \frac{f_3}{c}\right), b \min\left(\frac{f_1}{b}, \frac{f_2}{c}\right)\right),$$

$$f_2^{**} = \max\left(c \min\left(\frac{f_1}{b}, \frac{f_2}{c}\right), a \min\left(\frac{f_2}{a}, \frac{f_3}{b}\right)\right),$$

$$f_3^{**} = \max\left(c \min\left(\frac{f_1}{a}, \frac{f_3}{c}\right), b \min\left(\frac{f_2}{a}, \frac{f_3}{b}\right)\right).$$

Замечание 6. Как показали численные эксперименты если матрица A в теореме **3** не обладает требуемыми свойствами, то теорема не верна.

Гипотеза 7. *Теорема 3 справедлива в случае абстрактного полукольца.*

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проектов 18-47-860016, 18-01-00620), при поддержке Научного Фонда ЮГУ № 13-01-20/10.

Литература

[1] В. С. Владимиров. Преобразование Лежандра выпуклых функций. Матем. заметки, 1:6 (1967), 675–682; Math. Notes, 1(6), : 448-–452, 1967.

[2] Е. Д. Родионов, В. В. Славский. Полярное преобразование конформно-плоских метрик. Матем. тр., 20:2 (2017), 120–138; Siberian Adv. Math., 28(2), : 101—114, 2018.

[3] M. V. Kurkina, V. V. Slavsky, E. D. Rodionov. Conformally convex functions and conformally flat metrics of nonnegative curvature. Докл. АН СССР, 91(3), : 287—289, 2015.

[4] Г. Л. Литвинов, В. П. Маслов, А. Н. Соболевский. Идемпотентная математика и интервальный анализ. Вычислительные технологии, 6(6), : 47–70, 2001.

[5] М. В. Куркина. Об изменении кривизны конформно-плоской метрики при преобразовании Лежандра. Известия алтайского государственного университета, 4(102), : 88–92, 2018.

[6] Serge Sergeev and Hans Schneider. CSR expansions of matrix powers in max algebra. Transactions of the American Mathematical Society, 364(11) : 5969—5994, 2012.