Міністерство освіти і науки України
Одеська національна академія харчових технологій
Інститут математики НАН України
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Московский государственный педагогический университет
Тверской государственный университет
Одеський національный університет ім. І. І. Мечникова
Одеський державний екологічний університет
Міжнародний геометричний центр (Одеса)
Фонд "Наука"(Одеса)

Тези доповідей міжнародної конференції

ГЕОМЕТРІЯ В ОДЕСІ - 2015

Одеса, 25 травня - 31 травня 2015 р.

Abstracts of the International Conference

GEOMETRY IN ODESSA - 2015

Odessa, the 25th of May- the 31th of May 2015

Тезисы докладов международной конференции

ГЕОМЕТРИЯ В ОДЕССЕ - 2015

Одесса, 25 мая - 31 мая 2015 г.

ОДЕСА - 2015

ББК 22.15 (0)я 43
УДК 514(477)(100)(063)
Т29

Тези доповідей міжнародної конференції
ГЕОМЕТРІЯ В ОДЕСІ - 2015

Тези містять результати досліджень учасників Міжнародної конференції в галузі геометрії, топології та застосувань. Видання спрямоване на наукових співробітників, викладачів, аспірантів, студентів.

ISBN 978-966-389-171-2

ISBN 978-966-389-171-2

ББК 22.15 (0)я 43
УДК 514(477)(100)(063)
Т29

Abstracts of the International Conference
GEOMETRY IN ODESSA - 2015

Abstracts contain the results of researching of participants of the International Conference on geometry, topology and applications. The publication is addressed to researchers, lectures, post-graduate students.

ISBN 978-966-389-171-2

International Scientific Committee:
Prishlyak A. (Ukraine), Shelekhov A. (Russia) — Chairmans, Balan V. (Romania), Banah T. (Ukraine), Gandel Yu. (Ukraine), Glushkov A. (Ukraine), Haddad M. (Syria), Zarichnyi M. (Ukraine), Kirichenko V. (Russia), Kirillov V. (Ukraine), Kiosak V. (Ukraine), Konovenko N. (Ukraine), Kuzakon V. (Ukraine), Maksimenko S. (Ukraine), Marchenko V. (Ukraine), Matsumoto K. (Japan), Mashkov O. (Ukraine), Mikityuk I. (Ukraine), Milka A. (Ukraine),Mikes J. (Czech Republic), Mormul P. (Poland), Panzhenskiy V. (Russia), Pastur L. (Ukraine), Pokas' S. (Ukraine), Rahula M. (Estonia), Sabitov I. (Russia), Savchenko A. (Ukraine), Strikha M. (Ukraine), Fedchenko Yu. (Ukraine), Fomenko A. (Russia), Fomenko V. (Russia), Khruslov E. (Ukraine), Shurygin V. (Russia).

Organizing-Administrative Committee:
Egorov B. - chairman, rector ONAFT,
Kaprel'ants L. - deputy chairman, vice-rector of scientific research and international relations,
Fedosov S. - head of the international department ONAFT,
Volkov V. - Director P.M. Platonova ESIMACS,
Sergeeva A. - head of the chair of physics.

Organizing Committe:
Kuzakon V. - Chairman of the Organizing Committee, President of the Charity Fund «Science» (kuzakon_v@ukr.net);
Konovenko N. - deputy chaiman (konovenko@ukr.net);
Fedchenko Yu. - deputy chairman (fedchenko_julia@ukr.net);
Moiseenok A. - WEB-administrator (geom-odessa@ukr.net);
Bashkaryov P., Chepurnaya E., Cherevko E.,Khudenko N., Kuzakon G., Kurbatova I., Malina A., Melnik L., Nosenko L., Nuzhnaya N., Osadchuk E., Prokip V., Tuliakova A., Vityuk A., Zadorozhnyi V.,

ISBN 978-966-389-171-2

ББК 22.15 (0)я 43
УДК 514(477)(100)(063)
Т29

Тезисы докладов международной конференции
ГЕОМЕТРИЯ В ОДЕССЕ - 2015

Тезисы содержат результаты исследований участников Международной конференции в области геометрии, топологии и приложений. Издание адресовано научным работникам, преподавателям, аспирантам, студентам.

ISBN 978-966-389-171-2

ISBN 978-966-389-171-2

До 150-річчя Одеського національного університету імені І. І. Мечникова

У середині 19 сторіччя у Росії назріла нагальна потреба створення вищого навчального закладу на Півдні країни. Не зважаючи на панування феодально-кріпосницьких відносин, які перешкоджали розвитку всього нового і прогресивного, капіталістичні продуктивні сили впевнено розвивалися і прокладали собі шляхи в усі сфери господарського, суспільного і культурного життя. Південь, швидше від багатьох центральних губерній Росії, втягувався в капіталістичний розвиток. Тут швидкими темпами розвивалися товарно-грошові відносини, через порти Азово-Чорномор'я, особливо через Одеський порт, налагоджувались торгівельні відносини з державами Заходу. Життя вимагало все нових і нових спеціалістів для сільського господарства і промисловості, освічених урядовців для державного апарату. Шість університетів, що існували на той час у Росії (Московський, Петербурзький, Казанський, Дерптський, Київський та Харківський) – не могли повністю забезпечити Південь необхідними спеціалістами.

Одеськїй національний університет імені І.І. Мечникова

Природним було заснувати вищий навчальний заклад в Одесі – центрі молодого Новоросійського краю, що швидко розвивався. Урочисте відкриття Новоросійського університету відбулося 13 травня 1865 року.

Перший навчальний рік в університеті розпочався 7 вересня 1865 року на трьох факультетах - фізико-математичному (у складі 12 кафедр), історико-філософському (11 кафедр) та юридичному (13 кафедр). Першим ректором став професор математик І.Д. Соколов.

Завдяки зусиллям передових вчених - І.І. Мечникова, І.М. Сеченова, О.О. Ковалевського, Л.С. Ценковського, М.Ф. Гамалія, О.А. Веріго, М.Д. Зелінського, О.С. Посникова, О.О. Кочубинського, В.І. Григоровича та інших. Новоросійський університет швидко перетворився в один з центрів демократичної культури українського і російського народів і став відігравати важливу роль у розвитку науки.

Початок дослідженням в галузі математики у Новоросійському університеті дали учні і послідовники видатних вітчизняних математиків М.В. Остроградського і П.Л. Чебишева – І.Д. Соколов, Є.Ф. Сабінін, С.П. Ярошенко та ін. Вони та їх вихованці заклали фундамент одеської математичної школи.

Особливо слід відзначити вклад І.В. Слешинського. Його наукові дослідження були присвячені теорії неперервних дробів, засобу найменших квадратів, математичній логіці і наприкінці 19 століття набули фундаментального характеру. У Кракові (куди Слешинський І.В. переїхав у 1911 році) було надруковано 2-томний курс його університетських лекцій з теорії математичних доведень. Він виховав вчених, серед яких – викладачі Новоросійського університету Й.Ю. Тімченко, В.О. Циммерман, Ц.К. Руссьян, Є.Л. Буницький, які продовжили дослідження в області теорії інтегрування диференціальних рівнянь, варіаційного числення, математичної логіки, інтегральних рівнянь. Їм належать також праці з питань аналізу, теорії чисел та геометрії.

Вагомий вклад у розвиток одеської математичної школи внесли В.Ф. Каган і С.О. Шатуновський, які займалися обгрунтуванням та побудовою математичної науки. Перші наукові дослідження Кагана пов'язані з геометрією Лобачевського. Значним вкладом в науку була його магістерська дисертація «Основи геометрії», в якій було надано систематичне викладення неевклідової геометрії на основі аксіом з аналізом їх несуперечності та незалежності. Вперше в історії вітчизняних університетів він у 1921-22 рр. прочитав курс лекцій з теорії відносності. В Москві В.Ф. Каган, де він працював з 1929 р., заснував широковідому тензорну диференціально-геометричну школу.

Помітний вплив на математичні дослідження здійснив С.О. Шатуновський, один із перших представників конструктивних направлень у сучасній математиці. Вчений аксіоматично обґрунтував теорію площин,а також поняття об'єму многогранника без залучення теорії межі. Широко відомий оригінальний курс Шатуновського С.О. «Введение в аналіз», основи якого застосовуються у сучасній математиці. У 1917 році Шатуновський опублікував роботу «Алгебра как учение о сравнениях по функциональным модулям», де виклав нове побудування теорії Галуа. Йому належать також праці в області теорії чисел, математичного аналізу, геометрії.

На початку 20 ст. математичне відділення Новоросійського університету закінчили відомі радянські математики Д.О. Крижановський, М.М. Васильєв, О.С. Турчанінов, Г.Л. Михневич, З.Ю. Жемайтіс, Г.М. Фіхтенгольц та ін. Розвитку вітчизняної математики сприяла діяльність математичного відділення Новоросійської спілки дослідників. Його засідання відвідував відомий математик і механік О.М. Ляпунов. По запрошенню університету у 1918 році він прочитав цикл лекцій про форму руху небесних тіл, де викладалися результати його багаторічних досліджень.

Математики Новоросійського університету приймали активну участь у роботі з'їздів російських дослідників. Етапним для них був 7 з'їзд, який відбувся в Одесі у 1883 році. Підготовкою займався фізико-математичний факультет. У роботі математичної секції приймали участь відомі російські вчені Н.Є. Жуковський і С.В. Ковалевська, а також професори Новоросійського університету Н.О. Умов і В.В. Преображенський.

З 1920 по 1933 роки на базі Новоросійського університету існував Інститут народної освіти (ІНО). Цей період характеризується напруженою обстановкою боротьби і подолання труднощів. Не зважаючи на гострі протиріччя, які панували в стінах ІНО у роки розрухи і голоду, життя і побут поступово поліпшувались, удосконалювався навчальний процес. Помітних успіхів було досягнуто колективом науково-дослідної кафедри на чолі з Й.О. Тімченком. Секціями кафедри завідували С.О. Шатуновський, Й.О. Тімченко, Г.К. Суслов. Наукові розробки очолювали О.С. Турчанінов (варіаційне числення), М.С. Васільєв (механіка, векторне числення), К.Н. Щербина (методика математики), Д.О. Крижановський і Н.Г. Чеботарьов (алгебра), з ім'ям якого пов'язано формування радянської алгебраїчної школи і початок її світового визнання.

10 березня 1933 року вийшла Постанова Раднаргоспу УРСР про відновлення державних університетів на Україні, що стало підставою для відродження університету в Одесі. Перед університетом, який було перейменовано в Одеський, ставилась задача готувати викладачів і асистентів для вищих і середніх спеціальних навчальних закладів для середньої школи, наукових працівників, спеціалістів різного профілю. Строк навчання в університеті встановлювався п'ять років. Попервах у складі Одеського університету було чотири факультети - математичний, фізичний, хімічний і біологічний, а потім був організований

соціально-економічний факультет з історичним відділенням.

У активізації науково-дослідницької роботи у вищій школі значну роль зіграла Постанова Раднаргоспу СРСР від 13.01.1934 року про присвоєння вчених степенів і введення нової штатної системи. До 1940 року в Одеському університеті ступень доктора наук була присвоєна 14 вченим, кандидата наук – 67 пошукувачам. Наукові кадри готувались головним чином через аспірантуру.

Імпульсом для розвитку математики в Одеському університету послужила діяльність учня Н.Г. Чеботарьова, члена-кореспондента АН УРСР М.Г. Крейна. Представляють інтерес його дослідження в області алгебри, теорії функцій, функціонального аналізу, теорії диференціальних та інтегральних рівнянь. З початку 30-х років М.Г. Крейн разом з Ф.Р. Гантмахером вивчав властивості осциляційних матриць. Успішними були також дослідження, які відносяться до деяких спеціальних класів функцій, що провели М.Г. Крейн разом з Б.Я. Левіним. М.Г.Крейн досліджував питання про найкраще наближення функцій за допомогою тригонометричних многочленів (1937р.) і функцій кінцевого ступеню (1938), в області функціонального аналізу він разом зі своїми учнями побудував теорію конусів. У передвоєнні роки М.Г. Крейн створив одну з перших в СРСР школу функціонального аналізу (її представники - М.О. Наймарк, В.Л. Шмульян, М.О. Рутман, О.П. Артеменко та ін.)

Університет жив у ритмі мирної праці. Але розпочалася війна. Серед студентів-математиків з ОДУ, які у червні 1941 року отримали дипломи про освіту, був і майбутній член-кореспондент АН УРСР Герой Соціалістичної праці, лауреат Ленінської і Державної премій СРСР, заступник Головного конструктора КБ «Южный» М.Ф. Герасюта.

З вересня 1941 по квітень 1944 Одеський університет перебував в евакуації (спочатку у м.Майкоп, а потім – Байрам-Алі – районному центрі Марійської області Туркменської РСР).

Після визволення Одеси від тимчасової окупації, університет у повному складі відновив свою роботу 1 жовтня 1944 року. У 1944-45 навчальному році на шести університетських факультетах навчались 1043 студенти і 60 аспірантів. Викладання здійснювали 166 викладачів, об'єднаних у 51 кафедру. Серед них – 24 професори, 59 доцентів і кандидатів наук, 83 викладача. Професорсько-викладацький склад за рівнем своєї підготовки і кваліфікації успішно забезпечував навчально-виховний процес і науково-дослідницьку роботу.

В 1945 році університет закінчили 273 студенти, в тому числі 104 філологів, 66 істориків, 41 географів, 31 хіміків, 22 біологів і 9 фізиків та математиків.

У 1945 році, в рік нашої Перемоги, Одеський університет святкував своє 80-річчя, в зв'язку з чим йому було присвоєно ім'я великого вченого І.І.Мечникова, людини мирної професії, людини-творця. Для колектива викладачів і студентів цей акт став символом переходу від воєнних бурь до мирного життя.

У перші повоєнні роки математичне відділення фізико-математичного факультету складалося з двох кафедр – математичного аналізу та геометрії і алгебри. На кафедрі математичного аналізу з успіхом досліджувались задачі, пов'язані з проблемами наближення функцій (проф. Е.О. Стороженко, проф. В.І. Коляда, проф. Арк.О. Кореновський та ін.) і проблемами інтегральних операторів (проф. Г.С. Літвінчук, проф. Н.Л. Василевський, доц. О.П. Нечаєв, доц. З.М. Лисенко та ін.) На кафедрі геометрії і алгебри центральне місце у наукових дослідженнях займали питання основ геометрії.

У 1960 році після розподілу факультету на фізичний і механіко-математичний, деканом механіко-математичного факультету став професор М.І. Гаврилов. Коло його наукових інтересів включає: обґрунтування нового методу у теорії звичайних диференціальних рівнянь, основаного на теорії моментів, а також повний метод дослідження проблеми стійкості розв'язків систем Гамільтона-Пуанкаре при малих змінах параметру. З 1988 року кафедру диференціальних рівнянь очолює професор В.М.Євтухов. Вченими кафедри досліджуються асимптотичні властивості розв'язків деяких класів нелінійних диференціальних і інтегро-диферецiальних рівнянь новими аналітико-геометричними і аналітичними методами.

Дослідження в області обчислювальної математики, що розпочались на факультеті у 1957 році доцентами С.М. Кіро та М.Н. Швецом, призвели до створення у 1961 році кафедри обчислювальної математики, яку зараз очолює В.В. Реут. Основний напрям наукових досліджень кафедри з моменту її створення був пов'язаний з наближеними методами розв'язку диференціальних рівнянь – як звичайних, так і в частинних похідних. З середини 70-х років створилася група з вивчення системного програмування, яка займалася створенням програмного забезпечення для нової обчислювальної техніки, що розроблялась в Інституті кібернетики АН УРСР (доценти Д.О. Остроухов, Т.І. Петрушина, В.С. Макогон, В.М. Гребьонкін та інші).

Кафедра алгебри і теорії чисел була створена у 1963 році після розділу кафедри алгебри і геометрії. Її очолив М.Н. Швець, заслуга якого полягає у пропаганді нових наукових ідей. У 1978 році кафедру очолив П.Д. Варбанець, спеціаліст в області аналітичної теорії чисел. Йому належать результати про розподіл значень мульплікативних функцій у коротких інтервалах і у арифметичних прогресіях.

З моменту створення кафедри геометрії і топології її керівником до 1989 року був М.С. Синюков, який після закінчення аспірантури та захисту дисертації на здобуття вченого ступеню кандидата фізико-математичних наук в Московському державному університеті у 1955 році, був направлений на роботу в Одеський державний університет. Саме з того часу правомірно говорити про початок на кафедрі систематичної наукової роботи, яку очолював М.С. Синюков, появу свого кола наукових інтересів та тематики, а в подальшому - і про формування власної наукової школи.

Одним із напрямів наукових досліджень кафедри є геодезичні, F - планарні та P - геодезичні відображення афіннозв'язних, ріманових та келерових просторів. Таким відображенням присвячені багаточисельні дослідження М.С. Синюкова, його учнів та випускників кафедри – С.І. Федищенко, С.Г. Лейка, Й.Й. Мікеша, І.М. Курбатової, О.М. Синюкової, Н.В. Яблонської, В.Є. Березовського, І.Г. Шандри, К.М. Зубриліна. Досліджувались властивості геодезичних відображень ріманових просторів на симетричні та еквіафінні простори, було введено поняття полусиметричного ріманового простору, вивчались так звані нормальні простори. М.С. Синюков отримав нову форму основних рівнянь теорії геодезичних відображень ріманових просторів. Це дозволило перейти до дослідження загальних закономірностей названих відображень. Таким чином були отримані результати, що дозволяють для кожного ріманового простору у принципі встановити, чи допускає він нетривіальне геодезичне відображення, а якщо допускає, то знайти всі простори, які складають його геодезичний клас.

Завідування кафедрою геометрії і топології ОНУ у 1988-2010 рр здійснював доктор фізико-математичних наук, професор Святослав Григорович Лейко – учень професора М.С. Синюкова. Він розробив принципово новий напрям у диференціальній геометрії узагальнено-геодезичних відображень многовидів. Ним розглянуті поворотно-геодезичні та спін-геодезичні відображення, які ґрунтуються на варіаційному узагальненні геодезичних кривих та геодезичних відображень на базі функціоналів повороту кривих у (псевдо) ріманових просторах.

Наприкінці 50-х років минулого століття М.С. Синюков разом з декількома членами кафедри, аспірантами та студентами приступив до систематичного дослідження нескінченно малих деформацій поверхонь з застосуванням сучасних методів тензорного аналізу, теорії узагальнених аналітичних функцій І.Н. Векуа та граничних задач. Дослідження М.Л. Гаврильченка присвячені деформаціям, що зберігають елемент довжини на поверхні та нескінченно малим геодезичним деформаціям. Спеціальні нескінченно малі деформації поверхонь досліджувались Е.Д. Обозною та Л.А. Гармашовою. Л.Л. Безкоровайна вивчає питання нескінченно малих деформацій, які зберігають елемент площі поверхні (ареальні деформації).

Дослідження нескінченно малих ареальних деформацій поверхонь продовжується учнями Л.Л. Безкоровайної – Н.В. Вашпановою та Т.Ю. Подоусовою, які успішно захистили кандидатські дисертації.

Багаточисельні результати М.С. Синюкова локального і глобального характеру, які отримані у теорії геодезичних відображень ріманових просторів, посилили можливість їх застосування у фізиці та механіці. Актуальним стало вивчення наближених геодезичних відображень. В кінці 1980 років М.С. Синюков поставив проблему їх систематичних досліджень і розробки інваріантної теорії наближених методів у рімановій геометрії. Дослідженнями у цьому напрямі займається доцент С.М. Покась, який з 1 вересня 2010 року очолив кафедру геометрії і топології.

У період 1967-2013 рр. в аспірантурі кафедри навчались та захистили кандидатські дисертації 24 громадян як України, так і зарубіжжя.

Серед них Надь Петер і Бачо Шандор (Угорщина), Самі Аль Хуссін, Мохсен Шиха, Мішель Хаддад (Сірія), Раад Джамел Кадем (Ірак), Мікеш Йозеф (Чехія), Есенов К.Р. (Киргизстан).

У 1964 році була організована кафедра методів математичної фізики (завідувач кафедри професор Ю.Й. Черський). Основний науковий напрям кафедри – розробка теорії крайових задач аналітичних функцій та її застосування до задач математичної фізики. Ю.Й. Черський вперше дослідив рівняння плавного переходу (подальший розвиток рівняння типу згортки) та вказав основні їх застосування.

В 1972 році кафедру очолив професор М.Я. Попов, учень М.Г. Крейна. Ним була створена наукова школа, що вивчала задачі механіки деформованого твердого тіла та мішані задачі математичної фізики. Під керівництвом Г.Я. Попова були розроблені нові наближені і точні методи розв'язку мішаних задач, зокрема контактних задач теорії пружності. В зв'язку з тим, що з 1972 року кафедра розпочала підготовку спеціалістів з прикладної математики, були розроблені нові спеціальні курси, які пов'язані з застосування ЕОМ: технологія програмування і проектування програмних комплексів, операційні системи, пакети прикладних програм тощо.

Розробкою асимптотичних методів в задачах оптимального керування та їх застосуванням до дослідження динаміки і оптимальних режимів роботи судових комплексів займалась група вчених під керівництвом професора В.О. Плотнікова. На базі цієї групи у 1974 року була організована кафедра оптимального керування і економічної кібернетики. Дослідження проводились у тісному контакті із школами Л.С.Понтрягіна, Ю.О. Мітропольського, О.М. Самойленка, а також Л.О. Тихонова і А.Б. Васильєвої.

У 1977році була створена кафедра вищої математики (завідувач кафедри професор О.В.Костін), співробітники якої займалися аналітичними методами дослідження звичайних диференціальних рівнянь і рівнянь математичної фізики.

Одеський національний університет імені І.І. Мечникова сьогодні є одним із флагманів освіти і науки на півдні України – це 4 навчально-наукові інститути, 11 факультетів, 3 навчально- наукові центри, коледж, 99 кафедр, 3200 викладачів та наукових співробітників 140 докторів наук, професорів та понад 800 кандидатів наук, доцентів, 5 академіків, членів-кореспондентів НАН України і галузевих академій. В університеті працюють 27 всесвітньовідомих наукових шкіл. Підготовка фахівців здійснюється за 30 напрямками та 32 спеціальностями. В ОНУ працюють 10 спеціалізованих рад, в яких захист дисертацій здійснюється за 31 спеціальностями. Університет співпрацює з численними ліцеями, гімназіями і школами. В аспірантурі за 101 спеціальностями навчається понад 350 осіб. У 2014 році було захищено 58 кандидатських та 8 докторських дисертацій.

Н.С. Синюков

В связи с 90-летием со дня рождения

(1925-1992)

4 июля 2015 года исполняется девяносто лет со дня рождения известного ученого-геометра, доктора физико-математических наук, профессора Одесского государственного университета имени И.И. Мечникова Николая Степановича Синюкова.

Жизнеописанию и характеристике полученных Н.С. Синюковым научных результатов посвящено немало предыдущих публикаций (см., например, А.Д. Александров, А.М. Васильев, Э.Г. Позняк Николай Степанович Синюков (к 60-летию со дня рождения)/ Успехи мат. наук, 1986. - т. 41, вып.2. - с.215-216; С.Г. Лейко, С. М. Покась, Н.В. Яблонская. К 80-летию со дня рождения профессора Н.С. Синюкова / Тези доп. VI Міжнар. конф. з геометрії та топології / За ред. В.І. Дісканта.- Черкаси, 2005 -с.106-107; Николай Степанович Синюков. Библиографический указатель литературы. Серия "Ученые Одессы", вып. 36, составитель И.Э. Рикун, Одесская государственная научная библиотека им. М. Горького, Одесса, 2006; А.В. Аминова, С.Г. Лейко, С.М. Покась, М.О. Рахула, А.К. Рыбников, И.Х. Сабитов и др. Николай Степанович Синюков. В связи с 85-летием со дня рождения. Тезисы докладов международной конференции "Геометрия в Одессе - 2010", Одесса, 2010, с.9-13)

Первые работы Н.С. Синюкова были посвящены частным вопросам теории геодезических отображений римановых пространств.

После нахождения новой формы основных уравнений теории геодезических отображений римановых пространств Н.С. Синюков перешел к изучению общих закономерностей вышеуказанных отображений. Полученные им основные теоремы позволили для каждого риманова пространства, отнесенного к произвольной системе координат, установить, допускает оно нетривиальное геодезическое отображение или нет, а если допускает, то, в принципе, найти все пространства, составляющие его геодезический класс. Появилась также возможность решать вышеуказанные вопросы приближенно и даже численно, что, несомненно, представило интерес с прикладной точки зрения.

Естественным обобщением понятий геодезической линии, геодезического отображения пространств аффинной связности являются введенные Н.С. Синюковым понятия почти геодезической линии, почти геодезического отображения аффинносвязных пространств. Им были выделены три типа таких отображений, найдены характеризующие их уравнения.

Фундаментальные теоретические результаты по локальной теории геодезических отображений и ее обобщениям, полученные Н.С. Синюковым и развиваемые его учениками, создали предпосылки для систематических исследований глобальных аспектов соответствующих типов диффеоморфизмов. Для таких исследований Н.С. Синюков привлек методы Хопфа-Бохнера-Яно.

Введя понятие F-планарных кривых и F-планарных отображений аффинносвязных пространств, Н.С. Синюков начал разработку теории F-планарных отображений, являющихся широким обобщением геодезических, почти геодезических, аналитически планарных и квазигеодезических отображений.

Многочисленные результаты локального и глобального характера, полученные в теории геодезических отображений римановых пространств и ее обобщениях, увеличили возможности их использования в теоретической физике и механике. Актуальной стала разработка предложенных Н.С. Синюковым инвариантных относительно системы координат приближенных методов, нового подхода к построению геометрии касательных расслоений аффинносвязных и римановых пространств.

Научные интересы Н.С. Синюкова распространялись и на другие направления исследований в области геометрии. С конца 1950-х годов он, вместе с несколькими членами кафедры, аспирантами и студентами, занимался систематическим исследованием бесконечно малых ареальных деформаций поверхностей с использованием современных методов тензорного анализа, теории обобщенных аналитических функций и краевых задач.

Под руководством Н.С. Синюкова в Одессе сложилась оригинальная научная школа, разрабатывающая теорию диффеоморфизмов обобщенных пространств. Она получила признание в нашей стране и за рубежом. В настоящее время представители этой школы живут и работают не только в Украине, но и в других уголках Земного шара. (См., например, монографию *J.Mikeš*, *A.Vanžurovà*, *I.Hinterleitner* Geodesic Mappings and Some Generalizations, Olomouc, 2009.)

Николай Степанович оставил добрый след в Одесском университете не только результатами своих научных исследований, но и созданием кафедры геометрии и топологии, своей учебно-педагогической деятельностью, своими взглядами на задачи преподавания, обучения и воспитания молодого поколения. След этот сохранится надолго, скорее всего - навсегда.

Сотрудники кафедры
геометрии и топологии
Одесского национального университета
имени И.И. Мечникова

Наукометрия как один из инструментов Евроинтеграции Украины

В. Б. Егоров

(ОНАПТ, Одесса, Украина)

E-mail address: yegorov-victor@mail.ru

Ввиду непрерывно увеличивающегося количества учёных и сфер их научных изысканий все более актуальной проблемой становится поиск средств сравнения «успешности» учёных между собой. Сам факт вхождения ученого в Английское Королевское научное общество, например, или получение престижной, всемирно известной Нобелевской премии или престижнейших Международных премий (Абелевская и Филдовская в математике или премия Тьюринга в информатике и Притцкеровская в архитектуре) объективно как меры успешности ученого стали малоэффективными из-за абсолютности и чрезвычайно малого количества тех, кто удостоен чести их получения. Для тех, кому до получения таких наград и премий еще далеко, а азарта «померяться силами» вместе с тем не меньше, существуют различные наукометрические показатели. Цель наукометрических исследований - дать объективную картину развития научного направления, оценить его актуальность, потенциальные возможности, законы формирования информационных потоков и распространения научных идей. Реализация этой цели включает в себя ряд конкретных задач, совокупное решение которых должно дать ответ на большинство поставленных вопросов. Серьезный вклад в создании методологии и инструментария наукометрии внес Ю. Гарфилд, который в 1955 году высказал идею об индексировании ссылок на представленные в пристатейной библиографии публикации. Основополагающая идея наукометрических рейтингов основана на поверхностном взгляде на процесс получения научного результата. Все подобные показатели можно условно разделить на 3 типа: основанные на количестве публикаций, основанные на количестве цитирований и комбинированные показатели (основаны на количестве цитирований и количестве публикаций одновременно).

Показатели, основанные на количестве публикаций в целом малоэффективны, прежде всего, из-за очевидной субъективности. Оценивая результативность учёных по таким показателям, молодые учёные будут всегда в заранее проигрышном положении по сравнению со своими старшими коллегами. С целью нивелирования возраста ученого предлагался и относительный показатель, рассчитываемый как отношение общего количества публикаций и научного стажа автора. По такому показателю абсолютным рекордсменом можно считать советского химика Стручкова Ю.Т., который за период с 1981 по 1990 гг. опубликовал 948 статей, т.е. в среднем 4 дня на статью. Известен также и американский профессор Э. Тополь, который в период с 1980 опубликовал 1702 статьи, т.е. в среднем 7 дней на статью. Во многом такому положению дел способствуют и «холодные» авторы, т.е. включенные в состав авторов за свой авторитет и косвенную причастность к научному коллективу. Так, известно более 80-ти случаев, когда одновременно соавторами статьи являлось более 3000 человек и одна статья Института физики высокий энергий из Протвино, авторами которой значится 3185 человек [1].

Показатели, основанные на количестве цитирований - индексы цитирования (как правило, отражают суммарное количество ссылок в научных публикациях на работы автора). Индекс цитирования в целом отражает реакцию научного сообщества на соответствующие публикации. В основе таких показателей лежит предположение, что плохие работы не цитируют, за исключением особых отношений между авторами. Цитируемость зависит не только от уровня научных результатов, но и от других факторов, например, своевременности. Длительное время очень низкой будет цитируемость публикаций с научными результатами, которые значительно опередили текущие потребности или возможности их использования [1].

Большинству индексов цитирования свойственны такие особенности:

a) игнорируют самоцитирование или цитирование соавторами, что существенно снижает рейтинг «ученого-затворника» публикации которого интересуют только его самого;

b) игнорируют повторные цитирования одной работы одним тем же учёным, что уменьшает влияние договорного цитирования;

c) учитывают личный вклад ученого, разделяя количество цитирований между соавторами;

d) учитывают репутацию цитирующего издания, взвешивая количество ссылок в журнале на его фактор авторитетности;

e) учитывают интенсивность цитирований в разных науках (в биологии в 8 раз выше, чем в математике [2]).

При этом, кроме прямых ссылок на конкретную статью в списке литературы также имеет место скрытое и неформальное цитирование – т.е. ссылка на конкретный труд непосредственно в тексте публикации, без ее дальнейшего упоминания в списке литературы. Приводятся наблюдения [3], согласно которым через 10-30 лет после публикаций статей-шедевров на них все чаще начинают ссылаться неформально.

Показатели, основанные на количестве публикаций и на количестве цитирований одновременно в основе цели своего создания содержат задачу выявления учёных, которые пишут много и качественно. Одним из таких показателей является индекс Хирша. Индекс Хирша — показатель, предложенный в 2005 году аргентино-американским физиком Хорхе Хиршем из Калифорнийского университета в Сан-Диего первоначально для оценки научной продуктивности физиков. Индекс Хирша является количественной характеристикой продуктивности учёного, группы учёных, научной организации или страны в целом, основанной на количестве публикаций и количестве цитирований этих публикаций. Индекс Хирша или h-индекс – это максимальное целое число h, указывающее, что автор опубликовал h статей, каждая из которых процитирована хотя бы h раз. Эти h статей составляют ядро Хирша или h-ядро. Чтобы попасть в ядро Хирша, статью должны процитировать хотя бы h раз. Чтобы получить высокий индекс Хирша, надо писать много, при этом, не дробя результаты по нескольким публикациям. Простота расчетов и нечувствительность к типовым приемам искусственного улучшения вышерассмотренных показателей мгновенно сделали индекс Хирша популярным наукометрическим индикатором.

Недостатки индекса Хирша связаны с тем, что в нем не учитываются:

1) насколько превышен порог цитирований в ядре Хирша;

2) длина «хвоста», т.е. количество публикаций, не вошедших в ядро и уровень их цитирования.

Для компенсации этих недостатков предложены более тридцати модификаций индекса Хирша. Далее приведены лишь некоторые из них:

• **Individual h-index (original)** – результат деления стандартного h-индекса на среднее число авторов в статьях, которые входят в Хирш-ядро публикаций. Этот показатель призван уменьшить влияние на h-индекс числа соавторов публикаций, которое, по статистике, существенно отличается в различных областях знаний;

• **Individual h-index (PoP variation)** – вычисление h-индекса когда вместо полного числа цитирований каждой статьи используется отношение числа цитирований к числу авторов публикации;

• **g-Index** – индекс, учитывающий статьи ученого с наибольшим цитированием, который определяется следующим образом:

Наибольшее целое число g публикаций, которые все вместе набрали g^2 и более цитирований. (Исправляет недостаток индекса Хирша, который можно сформулировать следующим образом: «если статья попадает в число наиболее цитируемых h статей, то цитирование этой конкретной статьи больше никак не учитывается»);

• **a-Index** – это просто среднее число ссылок на статьи, входящие в Хирш-ядро;

• **m-Index** – это медиана числа цитирований h статей, входящих в Хирш-ядро публикаций автора. Является некоторым вариантом a-индекса и попыткой учесть распределение числа цитирований статей, входящих в Хирш-ядро;

• **i-Index** – научная организация имеет индекс i, если не менее i учёных из этой организации имеют индекс Хирша не менее i (i-индекс = 20 означает, что не менее 20 учёных имеют индекс Хирша 20);

Однако всем рассмотренным индексам свойственны существенные недостатки [3]:

a) так как, наукометрические показатели легко вычислить, то велик риск их неадекватного использования в качестве единственного критерий оценки многогранной научно – исследовательской деятельности ученого;

b) использование наукометрических показателей в качестве критериев оценки научной деятельности провоцирует учёных к «накрутке» этих показателей различными способами.

Кроме того, следует также отметить и другой не менее важный недостаток. В основе своей все рассмотренные индексы цитирования базируются на предположении, что автор честно указывает других авторов, на положения которых ссылается в своем собственном научном труде, в противном случае он рискует быть обвинен в плагиате и согласно Закону об авторских и смежных правах быть притянутым к ответственности. Из выше приведенного вытекают как минимум две существенных проблемы:

a) Согласно упомянутому Закону крайне трудно притянуть кого-либо к реальной ответственности за плагиат. Специалисты отмечают, что, несмотря на значительное увеличение количества преступлений данной категории, эффективность борьбы с ними продолжает оставаться на невысоком уровне. Суды рассматривают лишь 2 процента от общего числа возбуждённых дел, а почти 98 процентов прекращается на стадии предварительного расследования [5]. Качество применения норм уголовного закона по делам о нарушении авторских и смежных прав продолжает оставаться весьма и весьма низким [6].

b) Второй важной проблемой остаётся сквозное цитирование. Чтобы проще описать суть проблемы – выше намеренно приведен пример, который без дополнительного акцентирования внимания так и остался бы незамеченным. Для того, чтобы описать проблему о низкой статистике реальной ответственности за плагиат, о которой шла речь в предыдущем пункте, была использована статья [7], авторами которой, в результате самостоятельно проведённой статистической работы, были представлены удобные цифры, которые и легли в свою очередь в описание пункта *a*) выше. Однако указанные там же источники информации [5] и [6] были источниками в работе [7], но сама работа [7] отмечена в списке не была (изначально). Таким образом, явной становится проблема, когда одним автором проводится глобальная объёмная аналитическая работа, приводятся свои источники литературы, однако, зачастую, в список литературы другими приводятся лишь источники этой работы, оставляя за полем зрения читателей автора первичного аналитического обобщающего труда, выдавая их при этом за результат собственного исследования. В работе [1] даже приводится занятный пример обнаружения таких фактов, когда в списках литературы от статьи к статье «кочует» одна и та же изначально допущенная опечатка, что напрямую свидетельствует о том, что авторы не читали оригинала и приводят работу уже как источник непосредственно своих изысканий, лишь потому, что та значилась источником в работе которая, по сути воруется.

Кроме ряда очевидных недостатков различных наукометрических показателей упоминаются также мнения, что погоня за оценкой цитируемости отечественных работ является лишь стимулом для того, чтобы все работы переводили на английский язык, для удобства зарубежных ученых и удобства различных спецслужб. Также присутствуют мнения, что вся погоня за наукометрическими показателями среди учёных Мира косвенными методами намеренно провоцируется представителями основных глобальных систем Web of Science (WoS) компании Thomson Reuters (США) и Scopus компании Elsevier (Голландия) т.к. это в свою очередь стимулирует отечественные журналы вступать в эти системы, что конечно очень не просто для последних в виду высоких требований предъявляемых к журналам – претендентам, но и очень не дешево.

В виду рассмотренных недостатков наукометрических показателей авторы [4] предлагают отказаться от практики использования при оценке вклада ученого в науку различных искусственных показателей и даже предлагают ряд альтернативных мер:

1. Следует вновь разделить «перечень ВАК» на «докторский» (достаточно краткий, не более 10 процентов от текущего списка) и «кандидатский»;

2. Следует восстановить на новой основе использовавшееся в СССР ранжирование научных издательств на «центральные» и «региональные»;

3. При проведении научных конференций следует внедрить практику подведения итогов с выделением авторов нескольких лучших докладов;

4. Дополнить пару «Доктор наук» - «Кандидат наук» третьей составляющей «Заслуженный доктор наук»;

5. И др.

Однако очевидным в предложенных мерах является тот факт, что в процессе определения за автором права публикации в «центральном» научном издании или получения статуса лучшего доклада и прочих, также присутствует субъективный фактор личного мнения (личного отношения к автору) многоуважаемых членов организационного комитета конференции или редакционной коллегии журнала.

Выводы: Несмотря на рассмотренные недостатки различных наукометрических показателей и генерируемую спорность их необходимости, а также учитывая возможности «намеренного накручивания» этих показателей, очевидным является все же их необходимость как раз в первую очередь из-за их стремления к объективности. Если работа качественная, кто бы не был ее автор, а ее результаты представляют ценность для продвижения разработок других ученых, предполагая конечно честность последних, будут иметь место ссылки на указанную работу, а стало быть, увеличение цитируемости первоначального автора. Безусловно, рассмотренные недостатки наукометрических показателей существенны и максимум внимания должно быть уделено непосредственно нивелированию их как таковых. В конце концов, важным является не количество публикаций и даже не надуманная респектабельность изданий, в которых они публикуются, а то, что именно заложено в публикации, и от того на сколько оно имеет ценность для развития науки, что и будет в свою очередь отражено в количестве ссылок и цитирований на труд. Не будем забывать, что когда в 1905 году Альберту Эйнштейну присвоили докторскую степень, его диссертация оказалась абсолютным рекордом краткости среди учёных всех времен, когда-либо защищавших диссертации: несколько страниц рукописного текста, в основном формулы, из которых важнейшая обессмертила его имя: "энергия равняется массе, помноженной на квадрат скорости света". Это фундамент новой науки.

Список литературы

[1] С. Д. Штовба, Е. В. Штовба. *Обзор наукометрических показателей для оценки публикационной деятельности ученого* ,- Управление большими системами, Специальный выпуск 44: «Наукометрия и экспертиза в управлении наукой», 262 - 278 С.

[2] I. Podlubny. *Comparison of scientific impact expressed by the number of citations in different fields of science* ,- Scientometrics. (2005), Vol. 64, №.1. – P. 95–99.

[3] В. В. Писляков. *Наука через призму статей* ,- Публичные лекции «Полит.ру». (2011). – [Электронный ресурс] $URL : http : //polit.ru/article/2011/12/21/pislyakov_2011/$ (дата обращения 27.06.2013)

[4] А. И. Орлов. *Наукометрия и управление научной деятельностью. Управление большими системами* ,- Специальный выпуск 44: «Наукометрия и экспертиза в управлении наукой», 538 - 568 С.

[5] Р. Р. Мухина. *Методика расследования преступлений, нарушающих авторские и смежные права на аудиовизуальные произведения* ,- Автореф. дис. канд. юрид. наук. Томск, (2010). С. 1–2.

[6] В. М. Алиев, А. В. Борисов. *О наиболее распространенных ошибках, допускаемых при квалификации преступления, связанного с нарушением авторских и смежных прав* ,- Рос. следователь. (2011). № 2. С. 19–22.

[7] О. Г. Ершов, К. В. Карпов. *Особенности квалификации преступления о нарушении авторских и смежных прав*,- Журнал «Уголовный кодекс». (2014). №2.

Знаходження фінальної топології за допомогою відкритих насичених множин

В. М. Бабич, В. О. Пєхтєрєв

(КНУ імені Тараса Шевченка, Київ, Україна)

E-mail address: vyacheslav.babych@gmail.com, vasiliy@univ.kiev.ua

Нехай X — непорожня множина, $\{(X_\alpha, \tau_\alpha), \alpha \in T\}$ — родина топологічних просторів, $\{f_\alpha : X_\alpha \to X,\ \alpha \in T\}$ — родина відображень множин. Тоді на множині X існує найсильніша топологія, відносно якої всі відображення f_α, $\alpha \in T$, неперервні [1]. Вона має вигляд

$$\tau = \{U \subset X \mid f_\alpha^{-1}(U) \in \tau_\alpha,\ \alpha \in T\}. \tag{1}$$

Ця топологія зветься *фінальною топологією* на X відносно родини відображень $\{f_\alpha, \alpha \in T\}$.

Важливим частковим випадком фінальної топології є фактортопологія [2, 3]. Нехай (X, τ) — топологічний простір, Q — непорожня множина і $p : X \to Q$ — відображення множин. Фінальна топологія на Q відносно відображення p називається *фактортопологією* на Q відносно топології τ й відображення p, яке в цьому випадку називається *факторним*. Цю фактортопологію ми позначатимемо τ^p.

Попри те, що фінальна топологія задається явно, її практичне знаходження за формулою (1) вимагає обчислення прообразів всіх підмножин множини X відносно кожного відображення f_α та їх перевірку на належність топології τ_α, $\alpha \in T$. Тому важливим є відшукання ефективніших методів побудови фінальної топології. Зручним інструментом для цього виявляється алгоритм знаходження фактортопології за допомогою відкритих насичених множин.

Теорема 1. *Відображення $p : X \to Q$ топологічних просторів факторне тоді й лише тоді, коли відкритими (замкненими) в Q є множини вигляду $p(A) \cup B$, де A — відкрита (замкнена) в X насичена відносно p (тобто $A = p^{-1}(p(A))$) множина, а $B \subset Q \backslash p(X)$, і лише вони.*

Знайшовши всі фактортопології τ^{f_α} на X відносно топології τ_α та відображення f_α, фінальну топологію на X відносно родини відображень $\{f_\alpha,\ \alpha \in T\}$ можна обчислити як перетин отриманих фактортопологій.

Приклад 1. *Знайдемо фінальну топологію на множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ відносно родини відображень $\{f_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \alpha \in [0, 1)\}$ з евклідових просторів, заданих рівностями $f_\alpha(x) = [x] + \alpha$, де $[x]$ означає цілу частину дійсного числа x. Оскільки для кожних $\alpha \in [0, 1)$ та $x \in \mathbb{R}$ прообраз $f_\alpha^{-1}(f_\alpha(x)) = [[x], [x] + 1)$, то відкритими в природній топології насиченими відносно f_α є множини $\varnothing$, $\mathbb{R}$, $(-\infty, n)$, $n \in \mathbb{Z}$. Отже, за теоремою 1*

$$\tau^{f_\alpha} = \{A_\alpha, (\alpha + \mathbb{Z}) \cup A_\alpha, (\alpha + \{m \in \mathbb{Z} \mid m < n\}) \cup A_\alpha, n \in \mathbb{Z}, A_\alpha \subset \mathbb{R}\backslash(\alpha + \mathbb{Z})\},\ \alpha \in [0, 1).$$

Множина $U \subset \mathbb{R}$ належить шуканій фінальній топології тоді й лише тоді, коли існує таке розбиття $\{T, T', T''\}$ множини $[0, 1)$, що $U = A_\alpha = (\alpha' + \mathbb{Z}) \cup A_{\alpha'} = (\alpha'' + \{m \in \mathbb{Z} \mid m < n_{\alpha''}\}) \cup A_{\alpha''}$, де $n_{\alpha''} \in \mathbb{Z}$, $A_\alpha \subset \mathbb{R}\backslash(\alpha + \mathbb{Z})$, $A_{\alpha'} \subset \mathbb{R}\backslash(\alpha' + \mathbb{Z})$, $A_{\alpha''} \subset \mathbb{R}\backslash(\alpha'' + \mathbb{Z})$, для всіх $\alpha \in T$, $\alpha' \in T'$, $\alpha'' \in T''$. Звідси, шукана фінальна топологія на $\mathbb{R}$ має вигляд

$$\{\bigcup_{\alpha' \in T'}(\alpha' + \mathbb{Z}) \cup \bigcup_{\alpha'' \in T''}(\alpha'' + \{m \in \mathbb{Z} \mid m < n_{\alpha''}\}) \mid n_{\alpha''} \in \mathbb{Z}, \alpha'' \in T'', T', T'' \subset [0, 1), T' \cap T'' = \varnothing\}.$$

Список літератури

[1] Бурбаки Н. *Общая топология. Основные структуры.* – М.: Наука, 1968. – 272 с.

[2] Александрян Р. А., Мирзаханян Э. А. *Общая топология.* – М.: Высшая школа, 1979. – 336 с.

[3] Энгелькинг Р. *Общая топология.* – М.: Мир, 1986. – 750 с.

Аналіз одного диференціального рівняння з частинними похідними другого порядку

Л. Л. Безкоровайна, Ю. С. Хомич

(Одеський національний університет ім.І. І. Мечникова, Одеса, Україна)

E-mail address: liliyabezk@gmail.com, khomych.yuliia@gmail.com

Квазіареальна нескінченно мала деформація мінімальної поверхні S $(H = 0, K \neq 0)$ з відхиленням від дотичної площини, стаціонарним у будь-якому напрямі, була предметом дослідження в [1]. У даній роботі задача про існування зазначеної деформації немінімальної поверхні S $(H \neq 0, K \neq 0)$ зводиться, зокрема, до дослідження рівняння (у лініях кривини)

$$\frac{1}{b_{11}}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2}\frac{\partial^2 T^1}{(\partial x^1)^2} - \frac{2\sqrt{E}}{K}\frac{\partial(\frac{H}{\sqrt{E}})}{\partial x^1}\frac{\partial^2 T^1}{\partial x^1 \partial x^2} - \frac{1}{b_{22}}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2}\frac{\partial^2 T^1}{(\partial x^2)^2} + A\left(\frac{\partial T^1}{\partial x^1}, \frac{\partial T^1}{\partial x^2}, T^1\right) =$$

$$= \frac{1}{b_{11}}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}\frac{\partial^2 T^2}{(\partial x^1)^2} + \frac{2\sqrt{E}}{K}\frac{\partial(\frac{H}{\sqrt{E}})}{\partial x^2}\frac{\partial^2 T^2}{\partial x^1 \partial x^2} - \frac{1}{b_{22}}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}\frac{\partial^2 T^2}{(\partial x^2)^2} + B\left(\frac{\partial T^2}{\partial x^1}, \frac{\partial T^2}{\partial x^2}, T^2\right). \tag{1}$$

Тут $E \neq 0-$ейлерова різниця, а через A і B позначені групи доданків, які містять виключно функцію T^1 або T^2 та їх частинні похідні першого порядку відповідно. Таким чином, ліва частина рівняння виражається лише через T^1, а права частина представлена через T^2. Ліва і права частини цього рівняння рівноправні. Крім того, величини $\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2}$, $\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}$ одночасно в нуль не обертаються. Якщо $\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} = \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} = 0$, то з рівняння Гауса дістанемо $K = 0$, а цей випадок ми виключили з розгляду. Покладемо для визначеності $\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} \neq 0$. Тоді рівняння (1) в загальному випадку буде неоднорідним диференціальним рівнянням з частинними похідними другого порядку відносно T^1 та заданою правою частиною. Знайдемо його дискримінант

$$\triangle = \frac{-1}{K}\left[\frac{1}{g}\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2}\right)^2 + \frac{E}{K}\left(\frac{\partial(\frac{H}{\sqrt{E}})}{\partial x^1}\right)^2\right]. \tag{2}$$

Якщо $S-$поверхня еліптичного типу $(K > 0, H \neq 0)$, то рівняння (1) є неоднорідним рівнянням гіперболічного типу відносно функції T^1.

Якщо $S-$поверхня гіперболічного типу $(K < 0, H \neq 0)$, то можливі варіанти:

а) у випадку $\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\frac{H}{\sqrt{E}}\right) = 0$ рівняння (1) є рівнянням еліптичного типу відносно T^1;

б) у разі $\triangle = 0$ рівняння (1) є рівнянням параболічного типу відносно T^1.

Припустимо тепер, що $\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} = 0$. Тоді $\triangle = -\frac{E}{K^2}\left(\frac{\partial}{\partial x^1}(\frac{H}{\sqrt{E}})\right)^2$ і виникають випадки:

а) якщо $\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\frac{H}{\sqrt{E}}\right) \neq 0$, то рівняння (1) є рівнянням гіперболічного типу відносно T^1;

б) якщо $\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\frac{H}{\sqrt{E}}\right) = 0$, то рівняння (1) містить частинні похідні лише першого порядку відносно функції T^1.

Далі в роботі проводимо дослідження деяких граничних задач для диференціального рівняння (1).

Список літератури

[1] L. L. Bezkorovaina, Y. S. Khomych *About one problem for the quasiareal infinitesimal deformation of the surface in E_3-space.*// French Journal of Science and Education, Paris, 2014, № 2. – P. 641-647.

Ізометричні вкладення, кривина та обмеженість переддотичних просторів

В. В. Білет

(ІМ НАН України, Київ, Україна)

E-mail address: biletvictoriya@mail.ru

Переддотичні та *дотичні* простори до метричного простору X у точці p (з точки зору секвенційного підходу, [1]) – це метричні простори $(\Omega^X_{p,\tilde{r}}, \rho)$ із метрикою ρ, яка залежить від вихідної метрики d та заданої масштабованої послідовності $\tilde{r} = (r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ додатних дійсних чисел, що збігаються до нуля. Точки переддотичних просторів – це класи еквівалентних послідовностей із X, які збігаються до p, і серед цих точок є виділена точка, в яку переходить постійна послідовність $(p, p, \dots)$.

Вивчаються деякі взаємозв'язки глобальних властивостей інфінітезимальних метричних просторів (переддотичних та дотичних) з локальними властивостями вихідного метричного простору. А саме, досліджено питання про ізометричну вкладеність переддотичних просторів у скінченновимірні евклідові простори [2]; описано структуру метричних просторів, переддотичні до яких мають невід'ємну та недодатну за Александровим кривину [3]; встановлено умови обмеженості переддотичних просторів [4].

Список літератури

[1] O. Dovgoshey, O. Martio *Tangent spaces to general metric spaces.*, – Rev. Roumaine Math. Pures. Appl., (2011), V. 56, № 2, P. 137 – 155.

[2] V. Bilet, O. Dovgoshey *Isometric embeddings of pretangent spaces in E^n.*, – Bulletin of the BMS., (2013), V. 20, P. 91 – 110.

[3] В. В. Билет, А. А. Довгошей *Предкасательные пространства с неположительной и неотрицательной по Александрову кривизной.*, – Математичні студії., (2013), Т. 40, № 2, С. 198 – 208.

[4] V. Bilet, O. Dovgoshey *Boundedness of pretangent spaces to general metric spaces.*, – Ann. Acad. Sci. Fenn. Math., (2014), V. 39, № 1, P. 73 – 82.

Топологічна еквівалентність поліномів

С. В. Білун

(КНУ ім. Тараса Шевченка, Київ, Украина)

E-mail address: sbilun@univ.kiev.ua

Розглянемо функцію $Z = P(x)$, де $P(x)$-поліном. Будемо дивитись на $Z = P(x)$, як на функцію двох змінних від x і y. Критичними точками цієї функції будуть всі точки на прямих $x = a_i$, де a_i-критичні точки $P(x)$.

Теорема 1. *Нехай $P(x)$, $Q(x)$-два полінома, на які ми дивимось, як на поліноми від двох змінних x і y. Тоді поліном $P(x)$ топологічно еквівалентний поліному $Q(x)$ тоді і тільки тоді, коли ці поліноми топологічно еквівалентні як функції однієї змінної.*

Теорема 2. *Розглянемо функцію $Z = P(x) \cdot (A \cdot y)$, де $P(x)$ не має кратних коренів. Дві такі функції Z_1 та Z_2 топологічно еквівалентні тоді і тільки тоді, коли топологічно еквівалентні функції $P_1(x)$ і $P_2(x)$.*

Розглянемо далі функцію $Z = P(x) \cdot Q(y)$. Виникає питання: коли такі функції будуть топологічно еквівалентні?

Лема 1. *Якщо $Z = P(x) \cdot Q(y)$ і $P(x)$ має кратні корені, а $Q(y)$ не має кратних коренів, тоді множина критичних точок $\sum(F)$ є незв'язне об'єднання прямих.*

Список літератури

[1] Дж. Милнор *Особые точки комплексных гиперповерхностей.*,- Мир.Москва, (1971).

[2] Р. Уокер *Алгебраические кривые.*,- ИЛ.Москва,(1952).

Реалізація структурно-функціональної моделі формування методичної компетентності майбутніх вчителів у навчанні геометрії

С. В. Іванова, Г. А. Деребізова

(ДЗ «ПНПУ ім. К.Д.Ушинського», Одеса, Україна)

E-mail address: ivasvit@ukr.net

Тривалий час провідним напрямом науково-методичної роботи викладачів кафедри математики та методики її навчання Державного закладу «Південноукраїнський національний педагогічний університет ім. К.Д. Ушинського» є дослідження методичної компетентності вчителя у навчанні математики учнів загальноосвітніх шкіл. Під керівництвом проф. С.О. Скворцової розроблена структурно-функціональна модель формування методичної компетентності майбутніх вчителів у навчанні математики, при цьому значна увага приділена формуванню її геометричної складової.

У даній моделі відокремлені: нормативний, варіативний, спеціально-методичний, контрольно-оцінювальний, технологічний та проектувально-моделювальний компоненти методичної компетентності і визначені провідні технології їх формування на основі системного, діяльнісного, задачного та особистісно-зорієнтованого підходів. Зокрема встановлено, що на лекціях і на практичних заняттях доцільно використовувати технологію контекстного навчання (А.О. Вербицький), оскільки ця технологія дозволяє змоделювати зміст майбутньої професійної діяльності. Дана технологія передбачає широке використання дидактичних ділових ігор.

Нами підготовлені методичні рекомендації щодо підготовки та проведення таких рольових імітаційних ігор як «Урок геометрії у основній та старшій школі», «Геометричні змагання», «Методичний конгрес» для студентів фізико-математичних факультетів вищих педагогічних навчальних закладів. Зокрема, для кожної з даних ділових ігор розроблена імітаційна модель, яка містить: дидактичні цілі, предмет гри, графічну модель учасників гри, систему оцінювання. А також ігрова модель, за якою визначаються: цілі гри, комплект ролей і функцій гравців, сценарій, правила гри тощо.

Для дидактичної гри «Методичний конгрес» провідними вважаємо теми «Актуальні технології навчання геометрії у школі» та «Комп'ютерні презентації на уроках геометрії».

У даних методичних рекомендаціях відображений багаторічний досвід використання ділових ігор, який свідчить, що імітаційні та рольові ділові ігри є ефективним засобом формування методичної компетентності студентів, бо дозволяють моделювати складні типові навчальні ситуації і аналізувати способи професійної діяльності вчителя у цих ситуаціях.

Список літератури

[1] С. В. Іванова, Д. С. Поліда. Ділові імітаційні рольові ігри як важливий засіб набуття студентами методичних компетенцій: специфіка проектування // Актуальні проблеми методики навчання математики: Матеріали IV - VI регіон. наук.-практ. конф., Одеса, 22-23 квітня 2010 р., 13-14 квітня 2011 р., 4-5 квітня 2012 р. Під ред. С.В. Іванової. – О.: АО Бахва, (2012), С. 48-57.

[2] С. О. Скворцова. Динамічна модель процесу формування методичних компетенцій у майбутніх учителів // Педагогіка формування творчої особистості у вищій і загальноосвітній школах: зб. наук. пр. / редкол.: Т.І. Сущенко (голов. ред.) та ін. – Запоріжжя, Вип. 17 (70), (2011), С. 177-183.

Деформації веторних полів Морса-Смейла на тривимірних многовидах роду 2

І. М. Іванюк

(КНУ ім. Тараса Шевченка, Київ, Україна)

E-mail address: ivanna.ivanyuk@gmail.com

Нехай $F = \partial H = \partial H'$ — загальна поверхня роду g кренделів, $u = \{u_1, ..., u_g\}$ — система меридіанів кренделя H і $v = \{v_1, ..., v_g\}$ — система меридіанів кренделя H', $H \cup H' = M$ — розбиття Хегора многовида M. Трійка (F, u, v) називається *діаграмою Хегора* многовиду M.

Діаграми Хегора (F, u, v), (F', u', v') многовидів M, M' називаються *гомеоморфними*, якщо існує такий гомеоморфізм $h : F \to F'$, що $h(u) = u'$, $h(v) = v'$ або $h(u) = v'$, $h(v) = u'$ (порядок меридіанів при цьому не має значення). Діаграми Хегора (F, u, v), (F', u', v') називаються *ізотопними*, якщо існує така ізотопія $\varphi_t : F \to F$,, що $\varphi_0 = 1$, $\varphi_1(u) = u'$, $\varphi_1(v) = v'$. Діаграми (F, u, v), (F', u', v') називаються *напівізотопними*, якщо існують такі ізотопії $\varphi_t, \psi_t : F \to F$, що $\varphi_0 = \psi_0 = 1$, $\varphi_1(u) = u'$ і $\psi_1(v) = v'$.

Діаграми (F, u, v) і (F, u', v') називаються *еквівалентними*, якщо від однієї можна перейти до іншої за допомогою гомеоморфізмів, напівїзотопій і операцій додавання одного меридіана до іншого.

Можливі наступні рухи для діаграм: 1) витягування простих петель, 2)ковзання 3)попарна перестановка вершин (1),(2) між собою або (3) і (4).

Теорема. Якщо існує деформація, то вона реалізується рухами 1), 2), 3), Кожен рух задаємо парою діаграм, від однієї можна перейти до іншої послідовністю рухів.

Теорема. Якщо дві сім'ї топологічно еквівалентні в класі T_i, то вони задають однакові послідовності суміжних діаграм. Два поля класу T_i можна з'єднати шляхом (сім'єю векторних полів) в класі T_i, якщо існує послідовність суміжних діаграм, що з'єднує відповідні графи.

Нехай кількість рухів від однієї діаграми до іншої - n. Занумеруємо всі можливі рухи цілими числами, які будемо називати оснащенням. Послідовність діаграм, в якої у кожній парі задане оснащення, будемо називати оснащеною.

Теорема. Якщо двом сім'ям відповідають однакові оснащені послідовності, то вони топологічно еквівалентні.

Список літератури

[1] *Матвеев С.В., Фоменко А.Т.* Алгоритмические и компьютерные методы в трехмерной топологии. Изд. Московского университета. – 1991. – 301с.

[2] *Пришляк О.О., Іванюк І.М.* Топологія сім'ї векторних полів на поверхні, Proc. Intern. Geom. Center, Vol.6, №4. – с. 44–51.

[3] *Іванюк І.М., Пришляк О.О.* Топологічна структура деформацій веторних полів Морса-Смейла на тривимірних многовидах роду 2: Proc. Intern. Geom. Center. – 2014. – Vol.7, №4.

Молекули з атомів степені 2 на поверхнях з краєм

О. М. Іванюк

(КНУ ім. Тараса Шевченка, Київ, Україна)

E-mail address: oxana_ivanyuk@ukr.net

Нехай M - замкнений орієнтований двовимірний многовид (поверхня), f - гладка функція на M. Для многовидів з краєм аналогом функцій Морса є m-функції.

Означення. Функція $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ називається *m-функцією*, якщо:

а) усі її критичні точки – невироджені і не лежать на ∂M;

б) край многовиду можна подати у вигляді об'єднання $\partial M = \partial M_- \cup \partial M_0 \cup \partial M_+$ такого, що обмеження f_∂ функції f на ∂M_0 є функція Морса.

Означення. *Атомом* називається окіл P^2 критичного шару, який задається нерівністю $c-\varepsilon \leq f \leq c+\varepsilon$ для достатньо малого ε, розшаровану на лінії рівня функції f і яка розглядається з точністю до пошарової еквівалентності $P^2 = \{x : -\varepsilon \leq f(x) - c \leq \varepsilon\}$.

Нехай на поверхні X^2 задана функція Морса f. Її лінії рівня розшаровують поверхню, тобто виникає розшарування з особливостями. Розглянемо всі критичні значення c_i функції f і відповідні їм критичні рівні $f = c_i$. Кожному такому рівню відповідає деякий атом. При цьому граничні околи атомів з'єднані циліндрами, які є однопараметричними сім'ями неособливих зв'язних ліній рівня. Зобразимо наше розшарування у вигляді графа, в якості вершин якого візьмемо атоми. Це означає, що кожній вершині графа поставлений у відповідність деякий атом, причому вказано взаємно-однозначну відповідність між граничними околами атомів і ребрами графа, які дотикаються до даної вершини-атома. Кінці атомів з'єднані ребрами, які відповідають однопараметричним сім'ям регулярних околів.

Означення. Описаний граф назвемо *f-молекулою* W, яка відповідає парі (X^2, f).

Теорема. Всі молекули з чотирма і п'ятьма критичними точками можна отримати:

1) склеївши 2 атоми складності 2;

2) склеївши 3 атоми складності 2;

3) склеївши між собою не всі критичні точки атомів складності 2.

Список літератури

[1] *Пришляк О.О., Пришляк К.О., Міщенко К.І., Лукова Н.В.* Класифікація простих m-функцій на орієнтованих поверхнях: Журнал обчисл. та прикл. матем. – 2011. – №1 (104). – с.1-12.

[2] *Іванюк О.М., Пришляк О.О.* Атоми степені 2 на поверхнях з краєм: Proc. Intern. Geom. Center. – 2013. – Vol.6, №3. – с.40-53.

[3] *Іванюк О.М., Пришляк О.О.* Молекули з атомів степені 2 на поверхнях з краєм: Proc. Intern. Geom. Center. – 2014. – Vol.7, №3. – с.27-37.

Число топологічно нееквівалентних мінімальних функцій на орієнтовних поверхнях, II

О. А. Кадубовський

(ДДПУ, Слов'янськ, Україна)

E-mail address: `kadubovs@ukr.net`

Нехай M_g — замкнена гладка орієнтовна поверхня роду g, а $C_{1;1}(M_g)$ — клас гладких функцій на M_g, які мають точно один локальний мінімум, один локальний максимум та одну (в загальному випадку вироджену) суттєво критичну точку типу сідла (клас «мінімальних функції» на M_g). Функції f_1 і f_2 з класу $C_{1;1}(M_g)$ називають *топологічно еквівалентними*, якщо існують гомеоморфізми $h : \ M_g \to M_g$ і $l : \ R^1 \to R^1$ (l зберігає орієнтацію), такі що $f_2 = l \circ f_1 \circ h^{-1}$. Якщо h зберігає орієнтацію, функції f_1 і f_2 називають *O-топологічно еквівалентними* або ж *топологічно спряженими*.

Задача про підрахунок числа *O-топологічно нееквівалентних* функцій з класу $C_{1;1}(M_g)$ повністю була розв'язана в [2]. Питання про підрахунок числа *топологічно нееквівалентних* функцій з класу $C_{1;1}(M_g)$ залишалось відкритим.

Теорема 1. *Для довільного $g = \frac{n-1}{2}$ $(n \in N)$ число топологічно нееквівалентних функцій з класу $C_{1;1}(M_g)$ можна обчислити за формулою*

$$d_g^{**} = \frac{1}{2}\left(d_g^* + S_H^{\pm}(g;1)\right), \tag{1}$$

де d_g^* — число O-топологічно нееквівалентних функцій з класу $C_{1;1}(M_g)$, яке (з урахуванням результатів роботи [2]) можна знайти за формулою

$$d_g^* = \frac{1}{n}\left(d(n) + \sum_{i|n,\ i\neq n} \phi\left(\frac{n}{i}\right)\cdot d(i)\cdot \phi^*\left(\frac{n}{i}\right)\cdot\left(\frac{n}{i}\right)^{i-1}\right), \tag{2}$$

$\phi^*(q) = |\{1 \le h < q|\ \text{НСД}(h,q) = 1 = \text{НСД}(h+1,q)\}|$, $\quad \phi(q) = |\{1 \le h < q|\ \text{НСД}(h,q) = 1\}|$,
$d(n) = \frac{2(n-1)!}{(n+1)} = \frac{2(2g)!}{(2g+2)} = S_H(2g;1)$ — *«Hultman number» [3]* (послідовність **A060593** в [4])*;*

а величина $S_H^{\pm}(g;1)$ — це «signed Hultman number» [3] (послідовність **A001171** в [4])*, яку (з урахуванням результатів роботи [1]) можна знайти за формулами*

$$S_H^{\pm}(g;1) = \frac{2^{3g+1}\cdot(g+1)!\cdot(g!)^2}{(2g+2)!} + \sum_{i=1}^{g}\sum_{j=1}^{\min(i;g+1-i)} c(i;j)\cdot\left[\frac{2^{i-j-1}(2j)!(i-1)!(g+2-i-j)!}{(2j-1)j!}\right]^2, \tag{3}$$

$$c(i;j) = \frac{(-1)^{g+2+i-j}\cdot 2^{i-j+1}\cdot(g+1)\cdot(2i-2j+1)\cdot(i-1)!}{(g+2+i-j)(g+1+i-j)(g+1-i+j)(g-i+j)(g+1-i-j)!(2i-1)!(j-1)!}. \tag{4}$$

Список літератури

[1] P. J. Hanlon, R. P. Stanley, J. R. Stembridge. *Some combinatorial aspects of the spectra of normally distributed random matrices* // Contem. Math. — 1992. — Vol. 138. — P. 151–174.

[2] O. Kadubovs'kyj. *A class of chord diagrams of maximal genus* // Visnyk. Ser.: Fizyko-Mat. Nauky. Kyivs'kyj Univ. Im. Tarasa Shevchenka. — 2006. — No 1. — P. 17–27 (in Ukrainian).

[3] S. Grusea, A. Labarre. *The distribution of cycles in breakpoint graphs of signed permutations* // Discrete Applied Mathematics. — 2013. — Vol. 161, Issues 10–11. — P. 1448–1466.

[4] «The On-Line Encyclopedia of Integer Se-quences», published electronically at http://oeis.org.

Математика та інформаційні технології

Н. Г. Коновенко, Ю. С. Федченко, Н. П. Худенко

(ОНАХТ, Одеса, Україна)

E-mail address: `konovenko@ukr.net`, `fedchenko_julia@ukr.net`, `khudenkon@mail.ru`

В умовах сьогодення, в час інформатизації сучасного суспільства виникає гостра потреба у використанні новітніх технологій в математичній освіті. Саме тут у нагоді стають як програмне забезпечення, так і можливість використання on-line джерел. Все це зумовлює необхідність підвищення кваліфікації викладача в освоєнні даних розробок і методик навчання та впровадження їх до навчального процесу. Оскільки підвищення кваліфікації, зазвичай, здійснюється один раз на 5 років, то вкрай важливим є проведення методичних семінарів в рамках кафедри, секції, ВНЗ.

До ефективних способів застосування комп'ютерних засобів у навчальному процесі при вивченні вищої математики можна віднести: використання електронних підручників, тренажерів, енциклопедій, словників; використання та забезпечення дистанційної форми навчання; проведення on-line семінарів, тренінгів, консультацій; використання контрольних програм, тестів для перевірки знань і умінь студентів; створення і підтримка сайтів викладачів; створення презентацій навчального матеріалу.

Аналіз досвіду використання електронних презентацій показує, що вони дозволяють видозмінювати зміст заняття, задіяти творчий потенціал викладача, який має можливість скорегувати створені ним екранні форми представлення змісту навчального матеріалу і здійснювати самоаналіз планованого заняття. Переваги заняття з використанням презентацій полягають також в тому, що демонстраційні можливості мультімедійного забезпечення допомагають зберігати стійку мотивацію у студентів і забезпечують розвиток просторової уяви.

Важливу роль в підсилені навчального процесу відіграють: сайти викладачів, середовище дистанційного навчання, "хмарні" сервіси, програмні пакети та інші розробки ([1] - [4]).

Незважаючи на труднощі, що виникають під час впровадження новітніх інформаційних технологій, кафедра вищої математики ОНАХТ докладає максимум зусиль для впровадження їх до навчального процесу, у відповідності до вимог сьогодення.

Список літератури

[1] Р. Гуревич. Інтернет і його соціальні мережі в сфері освіти: напрями використання // Інформаційно-телекомунікаційні технології в сучасній освіті : досвід, проблеми, перспективи. – Ч. 1. – Львів : ЛДУ БЖД, (2012), С. 52–56.

[2] Т. Л. Архіпова, Т. В. Зайцева. Використання «хмарних обчислень» у вищій школі // Інформаційні технології в освіті. № 17, (2013), С. 99-108.

[3] Т. Бєлявцева, Н. Пономарева. Використання сервису Google docs у підготовці майбутніх учителів математики // Інформаційні технології в освіті. № 20, (2013), С. 24-32.

[4] Л. А. Пермінова. Організація самостійної роботи студентів-магістрантів засобами телекомунікаційних навчальних проектів // Інформаційні технології в освіті. № 14, (2013), С.86-90.

Використання інформаційно-комунікаційних технологій при навчанні математики

Ю. Г. Лобода, О. Ю. Орлова

(ОНАПТ, Одесса, Украина)

E-mail address: o_e_u_69@mail.ru

Потужним засобом інтенсифікації й активізації навчання, зокрема математики, є використання комп'ютерної техніки.

При використанні комп'ютера в якості навчального засобу виділяють три його основні форми: комп'ютер як тренажер, як репетитор, як пристрій, що моделює певні предметні ситуації (імітаційне моделювання). Комп'ютер також використовується для проведення громіздких обчислень. Тренувальні системи застосовуються для вироблення та закріплення навичок, використовуються програми контрольно-тренувального типу. Ці програми відносяться до традиційного програмованого навчання.

Репетиторські системи передбачають «діалог» між студентом і комп'ютером. Тут існує обернений зв'язок, який здійснюється не лише при контролі, айв процесі засвоєння знань.

«Діалог» з комп'ютером відрізняється від діалогу між людьми. Діалог - це розвиток теми, точки зору співрозмовників тощо. «Діалог» з машиною таким не є. Індивідуалізація навчання здійснюється за рахунок розгалуженої програми.

Використання комп'ютерних моделей предметних ситуацій розкриває властивості цих ситуацій, розширює зону пошуку варіантів розв'язування тощо.

Згідно з інформаційним підходом, навчання являє собою індивідуалізований процес роботи студента зі знаковими відомостями на екрані. В останні роки зміст підручників і навчальних посібників закладають в комп'ютер. Але, якщо навчальний матеріал був незрозумілим предметною мовою, то він залишиться незрозумілим і мовою програмування.

Науковці тих країн, де накопичений великий досвід комп'ютеризації, вважають, що реальні досягнення в цій галузі не дають підстав уважати, що використання комп'ютера кардинально змінить традиційну систему навчання. Використання комп'ютера в навчальному процесі - це не панацея. Треба так спроектувати принципово нову технологію навчання, де комп'ютер органічно вписувався б як потужний засіб навчання.

Електронне середовище здатне формувати такі якості, як схильність до експериментування, гнучкість, структурність тощо, що сприяє створенню умов для творчого навчального пізнання, встановлюванню зв'язків між новою та старою інформацією тощо.

Застосування комп'ютера повинно сприяти формуванню мислення студента, орієнтувати його на пошук системних зв'язків і закономірностей.

Для комп'ютерного навчання доцільно обирати тільки такий зміст, для засвоєння якого не можна обійтися без комп'ютера. Варто також зазначити, що підвищення активності студента спрямовує його до самостійної роботи, а систематична самостійна робота над навчальним матеріалом на заняттях і в позааудиторний час сприяє зростанню активності, тобто активність і самостійність особистості тісно взаємопов'язані та доповнюють одне одного.

Список літератури

[1] Т. В. Крилова, О. М. Гулєша, О. Ю. Орлова. Концепція активізації процесу навчання математики студентів вищої технічної школи // Матеріали XVI міжнар. наук.-метод. конф. «Методы совершенствования фундаментального образования в школах и вузах», Севастополь, 19-23 вересня 2011 р. - Севастополь: СевНТУ, (2011), с. 80-83.

Математична освіта як метод пізнавальної активності студентів

Н. В. Нужна

(ОНАПТ, Одесса, Украина)

E-mail address: `Lada5.00@rambler.ru`

Одним із способів підвищення якості навчання математики є застосування в освітньому процесі методів, спрямованих на становлення і розвиток пізнавальної активності і самостійності. Педагогічна технологія розвитку критичного мислення сприяє активізації навчальної діяльності, мотивації навчання і тим самим підвищенню його якості. З методичної точки зору дана технологія - це система різних прийомів, які об'єднують всі види навчальної діяльності, що включає проблемне навчання, технологію навчальної дискусії і т.д. Для постійного удосконалення якості навчання математики на кафедрі працює методичний семинар. Основу технології розвитку критичного мислення становить модель трьох стадій: «виклик - реалізація (осмислення) - рефлексія (міркування)». Перша стадія - стадія виклику. Основна мета даної стадії - актуалізація наявних знань по досліджуваному предметі, обговорення та запис всієї інформації, наприклад, у вигляді вірних і невірних тверджень. Застосовуються різні прийоми такі як: графічна систематизація за допомогою таблиць або кластерів, розповідь - припущення за ключовими словами, складання списку «відомої інформації»і т. Д. Робота на даній стадії здійснюється як індивідуально, так і в групах. Всі вживані на стадії виклику прийоми сприяють формуванню пізнавального інтересу до предмета. Друга стадія - стадія осмислення. На даній стадії відбувається перше знайомство з новою інформацією, представленою або у вигляді лекції, або фільму (фільми: «Історія математики», «Геометрія Всесвіту», «Математика и красота», «Секретные коды», ACADEMIA. Михаил Цфасман «Как и зачем мы занимаемся математикой», ACADEMIA. Николай Андреев «Математические этюды», лекція «Математика і математики», «Фрактали»), або тексту підручника (кафедра забезпечена двома навчальними посібниками та методичками по всім розділам). Далі відбувається аналіз нових знань, співвіднесення їх раніше вивченими і систематизація старих і нових знань. Цьому сприяють такі прийоми як: ведення записів (подвійні щоденники, бортові журнали), маркування з використанням значків «+», «–», «?», «V»(«+»- те, що стало цікавим і несподіваним, «–»– те, що суперечить уявленням,«?»– те, про що хотілося б дізнатися докладніше,«V»- те, що вже відомо), пошук відповідей на поставлені в першій частині питання і т. д. Учні на стадії осмислення вчаться формулювати висновки, робити висновки, працюючи індивідуально і в парах. Третьою стадія - стадії рефлексії характерна творча переробка, аналіз, інтерпретація і оцінка вивченої інформації.

Загальні нескінченно малі деформації поверхонь при деяких обмеженнях

Т. Ю. Подоусова

(Одеська державна академія будівництва та архітектури, Одеса, Україна)

E-mail address: tatyana_top@mail.ru

Н. В. Вашпанова

(Одеська національна академія харчових технологій, Одеса, Україна)

Існування загальної нескінченно малої (з.н.м.) деформації регулярних поверхонь S визначається розв'язком наступної системи рівнянь [1]:

$$\widetilde{T}^{\alpha i}_{,\alpha} - b^i_\alpha T^\alpha = 0, \quad b_{\alpha\beta}\widetilde{T}^{\alpha\beta} + T^\alpha_{,\alpha} = 0,$$

а частинні похідні вектора зміщення мають вигляд:

$$\overline{y}_i = c_{i\alpha}\left(\widetilde{T}^{\alpha\beta} + \mu c^{\alpha\beta}\right)\overline{r}_\beta + c_{i\alpha}T^\alpha\overline{n},$$

де $\mu(x^1, x^2)$-деяка функція класу C^2.

Розглядається з.н.м. деформація S, яка характеризується наступними властивостями:

1. сферичний образ S стаціонарний, тобто, варіація одиничного вектора нормалі $\overline{n}$ поверхні дорівнює нулю:$\delta\overline{n} = 0$;

2. зберігається (в головному) сітка ліній геодезичного скруту [2].

Задача про існування такого типу деформацій S зведена до розв'язування системи двох диференціальних рівнянь відносно функції μ та контраваріантного вектора T^α:

$$\mu_i + B^k A_{ki}\mu + C^k A_{ki} = 0,$$

де $\mu_i = \frac{\partial\mu}{\partial x^i}, (i = 1, 2), A_{ki}, B^k$- відомі функції точки поверхні S, а функції C^k виражаються через T^α та їх частинні похідні.

Доведена наступна

Теорема. *Мінімальні поверхні S класу C^4 і тільки вони, допускають нетривіальну з.н.м. деформацію зі стаціонарними сферичним образом і лініями геодезичного скруту.*

В якості прикладу розглядаються з.н.м. деформації катеноїда при вказаних обмеженнях.

Список літератури

[1] Л. Л. Безкоровайна *Структура множини розв'язків системи рівнянь для загальної нескінченно малої деформації.*,- Тези доповідей міжнародної конференції "Геометрія в Одесі-2004".-Одеса(2004)-с.7-8.

[2] Т. Ю. Вашпанова *Про існування деформацій поверхонь з стаціонарною LGT-сіткою.*,- //Матеріали третьої міжнародної наукової конференції молодих вчених і студентів з диференціальних рівнянь та їх застосувань, присвячена Я.Лопатинському. -Львів (3-6 листопада), 2010, с.48-49.

Топологія m-полів з трьома сідлами на 2-вимірному диску

Пришляк О.О., Прус А.А.

(КНУ, Київ, Україна)

E-mail address: prishlyak@yahoo.com, andrei.prus@mail.ru

Нехай M - гладкий(класу C^{∞}) компактний n-вимірний многовид з краєм, X — гладке векторне поле, всі особливі точки якого не лежать на краю.

Нехай в околі точки краю $x_0 = (x_0^1, ..., x_0^{n-1}, 0)$ задана карта з координатами $(x^1, x^2, ..., x^n)$, $x^n \geq 0$.

Поле $X = (X^1, X^2, ..., X^n)$ *трансверсальне* до краю у точці x_0, якщо $X^n(x_0) \neq 0$ і *дотичне*, якщо $X^n(x_0) = 0$. Позначимо $N \subset \partial M$ підмножину точок, у яких поле дотикається краю.

Підмноговид N назвемо *невиродженим*, якщо всі його точки невироджені. Позначимо ті компоненти N, у яких $\frac{\partial X^n}{\partial x^1}(x_0) > 0$, через N_i^+, а в яких $\frac{\partial X^n}{\partial x^1}(x_0) < 0$, через N_i^-.

Об'єднання всіх точок, що проходять через N_i^+ при русі по траєкторіях у позитивному напрямку будемо називати *стійким* многовидом для N_i^+, а які проходять N_i^+ у негативному — *нестійким* многовидом для N_i^+.

Векторне поле X називається *m-полем*, якщо виконані такі умови:

1) поле має скінчене число критичних елементів (особливих точок і замкнутих орбіт) і усі вони невироджені (гіперболічні) і не мають із краєм спільних точок;

2) α- і ω-граничні множини кожної траєкторії, якщо вони визначені, лежать в об'єднанні критичних елементів;

3)поле трансверсально перетинає край у всіх точках, за винятком точок підмноговидів $N_i \subset \partial M$ розмірності n-2, що є невиродженими;

4)стійкі і нестійкі многовиди критичних елементів і підмноговидів N_i^+ перетинаються трансверсально.

Елементарним квадратом називається квадрат, сторони якого орієнтовані так, що дві з вершин є джерелами, а два інші стоки.

Будемо розглядати такі m-поля, у яких $N_i^+ = \emptyset$. Тоді кожному такому полю можемо поставити у відповідність діаграму, що отримана з елементарних квадратів, склеєних за гомеоморфізмами своїх сторін. В роботі [1] знайдені діаграми з одним та двома квадратами та доведено, що m-поля будуть топологічно еквівалентними тоді і тільки тоді, коли їх квадратні діаграми ізоморфні.

Нами доведено, що якщо склейка квадратів дає двовимірний диск, то вона задає m-поле на ньому.

Розглянемо векторні m-поля, у яких 3 сідлові точки (три елементарних квадрати). Скажемо, що m-поле має тип (a, b, c), якщо у нього a витоків, b сідел та c стоків. Нами було знайдено всі m-поля з трьома сідлами. Виявилося, що є 3 поля типу (0,3,0), 6 полів типу (1,3,0), 8 полів типу (2,3,0), 6 полів типу (0,3,1), 8 полів типу (0,3,2), 14 полів типу (1,3,1), 5 полів типу (1,3,2), 5 полів типу (2,3,1).

Список літератури

[1] А. О. Пришляк. *Топологическая классифика-ция m-полей на двух- и трех-мерных многообразиях с краем.*, - Укр.мат. журн., (2003) т.55, No.6, С.799-805.

[2] М. В. Лосева, А. О. Пришляк. *О структурно устойчивых обыкновенных дифференциальных уравнениях на поверхностях с краем.*, - Журнал обчисл. та приклад. математики., (2003) No.1(87),С.45-48

m-поля на однозв'язній області без внутрішніх сідлових точок

Пришляк О. О., Хоміцький О. А.

(КНУ, Київ, Україна)

E-mail address: `prishlyak@yahoo.com, ostapkhomitskyi@mail.ru`

Нехай M - гладкий (класу C^∞) компактний n-вимірний многовид з краєм, X - гладке векторне поле, всі особливі точки якого не лежать на краю.

Нехай в околі точки $x_0 = (x_0^1, \ldots, x_0^{n-1}, 0)$ краю задана карта з координатами $(x_1, x_2, \ldots, x_n), x_n \geq 0$.

Поле $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ *трансверсальне* до краю в точці x_0, якщо $X^n(x_0) \neq 0$ і дотичне, якщо $X^n(x_0) = 0$. Позначимо $N \subset \partial M$ підмножину точок, у яких поле дотикається краю.

Точку $x_0 \in N$ будемо називати *невиродженою*, якщо в системі координат $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$, яка вибрана, як описано вище, виконуються такі нерівності:

$$X^1(x_0) \neq 0 \ i \ \frac{\partial X^n}{\partial x^1}(x_0) \neq 0$$

Підмноговид N назвемо *невиродженим*, якщо всі його точки невироджені.

Позначимо компоненти N, у яких $\frac{\partial X^n}{\partial x^1}(x_0) > 0$, через N_i^+, а в яких $\frac{\partial X^n}{\partial x^1}(x_0) < 0$, через N_i^-.

Будемо розглядати векторні поля X, які мають такі властивості:

- поле не має сідлових точок і замкнутих орбіт.
- $\alpha-$ і $\omega-$граничні множини кожної траєкторії, якщо вони визначені, лежать в об'єднанні стоків та витоків;
- поле трансверсально перетинає край у всіх точках, за винятком точок підмноговидів $N_i \subset \partial M$ розмірності n-2, що є невиродженими;
- траєкторії, що проходять через N_i^+, перетинаються трансверсально.

Назвемо *елементарним трикутником* трикутник, сторони якого орієновані так, що одна з вершин є джерелом, а одна - стоком. Це рівносильне тому, що сторони не утворюють орієнтованого циклу. Вершину, що, не є джерелом чи стоком, будемо називати *сідловою*.

За кожним векторним полем будуємо діаграму, що складається з елементарних трикутників, склеєних за гомеоморфізмами сторін з урахуванням орієнтацій. Нами знайдено, що якщо N_i^+ складається з трьох точок, то існує 16 варіантів векторних полів без стоків і витоків, 44 варіанти з одним стоком або витоком, 4 варіанти з одним стоком і одним витоком, 2 варіанти з двома стоками або витоками.

Список літератури

[1] А. О. Пришляк *Топологическая классификация m-полей на двух- и трех-мерных многообразиях с краем.*, - Укр. мат. журнал, (2008), т.55, №6, С.799-805.

[2] М. В. Лосева, А. О. Пришляк. *О структурно устойчивых обыкновенных дифференциальных уравнениях на поверхностях с краем*, - Журнал обчислювальної и прикладной математики., (2003), № 1(87), С.45-48.

Гиперболічні векторні поля з мінімальним числом особливих точок на межі поверхні

Н. М. Рись

(Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна)

E-mail address: pantera.mail@mail.ru

Розглядаються векторні поля на поверхні з межею, які дотикаються до межі не мають внутрішніх особливих точок та замкнених траєкторій, а особливі точки, що лежать на межі, є гіперболічними. Остання умова означає, що точки бувають 4 типів: 1) витоки, 2) стоки, 3) a-сідла, у які входять дві траєкторії по межі поверхні, а одна траєкторія виходить всередину поверхні, 4) b-сідла – дві траєкторії виходять по межі поверхні, а одно входить по внутрішності поверхні.

Серед всіх таких полів будемо розглядати поля з мінімальним числом особливих точок. На поверхнях з однією компонентою межі такі поля будуть мати один витік та один стік. На орієнтовній поверхні роду g вони мають 2g a-сідел та 2g b-сідел. На неорієнтовній поверхні роду g вони мають g a-сідел та g b-сідел. Отже, у таких полів на торі з діркою буде 6 особливих точок, на листі Мьобіуса – 4 особливих точки, на пляшці Клейна з діркою – 6 особливих точок.

Нами було встановлено, що з точністю до топологічної еквівалентності на торі з діркою існує два таких поля, на листі Мьобіуса – єдина поле, на пляшці Клейна з діркою – три поля.

Автор висловлює щиру подяку науковому керівнику Пришляку Олександру Олеговичу, професору кафедри геометрії механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка, за постановку задачі та цінні поради.

Список літератури

[1] *А.О.Пришляк.* Топологическая классификация m-полей на двух- и трех-мерных многообразиях с краем // Укр.мат. журн., т.55, No.6, 2003.- с.799-805.

[2] *D.P.Lychak, A.O.Prishlyak.* Morse functions and flows on nonorientable surfaces// Methods of funct.an. and topology, V.15, N.3, 2009. P.251-258.

Функції на доповненні до тривимірного диска в повному торі.

К. О. Сердечнюк

(КНУ, Київ, Україна)

E-mail address: katelyogkaya@gmail.com

Розглянемо тривимірне тіло $B \times S^1 \setminus D^3$. Це повний тор з двома повними торами всередині нього та викинутим тривимірним диском. Дане тіло можна утворити обертанням двовимірного диска з двома дірками навколо осі Oz

На досліджуваному тілі задана функція без внутрішніх критичних точок. Ця функція буде називатися m-функцією. При цьому на межі вирізаного тривимірного диска будуть критичні точки. Обмеження функції на межу – функція Морса.

Функція на $B \times S^1 \setminus D^3$ має чотири компоненти краю: три компоненти краю – тори, а четверта – сфера (межа вирізаного диска). На перших трьох компонентах краю функція постійна, а на границі D^3 – також функція Морса.

Ми даємо грубу топологічну класифікацію функцій без внутрішніх критичних точок на повному торі з двома повними торами всередині та з викинутим околом внутрішньої точки, що має граничні точки на границі вирізаного тривимірного диска.

Повний інваріант функції на даному тілі буде складатись із:

1. Графа Ріба;
2. Слів у кожній із сідлових вершин;
3. Груп ребер;
4. Родів кожної з груп ребер.

При побудові графа Ріба тривимірного тіла, слід зауважити, що вийде два графи: перший – для $B \times S^1$, а другий – для сфери. Один буде відображатись у інший.

Граф Ріба для сфери, взагалі кажучи, може бути будь-яким деревом. Він відображається на другий граф Ріба. При цьому, прообраз сфери може відображатись у різні місця на графі для $B \times S^1$.

Позначимо ребра першого графа буквами a, b, c рухаючись зверху вниз і з права наліво. Сідлова вершина буде одна. Прообраз сфери позначимо через d.

Отже, представимо граф у вигляді послідовності наборів ребер, так, що кожен набір відповідає регулярному рівню функції:

1. $1)\{a\}; 2)\{a, d\}; 3)\{a\}; 4)\{b\}, \{c\};$
2. $1)\{a\}; 2)\{a, d\}; 3)\{b, d\}, \{c, d\}; 4)\{b\}, \{c\};$
3. $1)\{a\}; 2)\{a, d\}; 3)\{b\}, \{c, d\}; 4)\{b\}, \{c\};$
4. $1)\{a\}; 2)\{b\}, \{c\}; 3)\{b\}, \{c, d\}; 4)\{b\}, \{c\}.$

Список літератури

[1] А. О. Пришляк *Топологические свойства функций на двух- и трехмерных многообразиях.*,- Palmarium Academic Publishing, (2012), С. 33-53.

[2] А. В. Болсинов, А. Т. Фоменко *Интегрируемые гамильтоновые системы. Геометрия, топология, классификация. Том.1.*,- Ижевск: Изд. Дом "Удмурский Университет (1999), С. 444.

М-діаграми Хегора для многовидів з межею

Д. М. Скочко, В. В. Мороз

(КНУ ім. Т.Г.Шевченка, Київ, Україна)

E-mail address: geroyasf@gmail.com

E-mail address: vikamoroz1993@gmail.com

В [1] та [2] Пришляк О.О. ввів поняття $m-$діаграм Хегора для класу $m-$функцій на тривимірних многовидах.

Нехай в простір R^3 вкладено многовид T, такий, що $T = M \bigcup N$ - об'єднання ручок, індекси яких дорівнюють 1, 0, (0, -1), (0, +1), (1, -1), $F = \partial M = \partial N$ - спільна поверхня з межею многовидів M та N. Набір $u = \{u_1, u_2, ..., u_n, u_1^m, u_2^m, ..., u_s^m\}$ неперетинних, правильно вкладених кривих на поверхні F таких, що будь-яке u_i є косередньою сферою ручки індексу 1, а u_j^m- перетин косередньої сфери ручки індексу (1, 1) з F називається узагальненою системою меридіанів кренделя M. Набір $v = \{v_1, v_2, ..., v_n, v_1^m, v_2^m, ..., v_s^m\}$, яий складається зі сфер ручок індксу 2 і перетину середніх сфер ручок індексу (1, +1) з F, називається узагальненою системою меридіанів кренделя N. Трійка (F, u, v) називається m-діаграмою Хегора многовида T, а поверхня F - поверхнею Хегора.

Нехай M та N - компактні поверхні з межею, що вкладені в R^3 і задано гомеоморфізм $h : M \to N$, за яким ці поверхні склеюються. Побудуємо на кожному з многовидів M та N меридіани таким чином, щоб кінці кожного з них належали різним компонентам межі і якщо вздож них розрізати поверхню, отримаємо поверхню з однією компонентою межі.

Ототожнимо многовиди M та N з деякими графами G_M та G_N таким чином: компоненти межі представимо як точки, а меридіани як ребра. Графи G_M та G_N - дерева, ребра яких після склеювання не перетинаються. M та N мають однакову кількість компонент межі, а саме від однієї до п'яти.

Для випадків, коли M та N мають по одній компоненті межі існує 1 варіант склейки, для 2: 1, для 3: 2, для 4: 12. Розглядаючи випадок з п'ятьма компонентами межі, отримаємо графи на п'яти вершинах, яких можна побудувати лише три (неізоморфні дерева): з 2, 3, та 4 листками, тому існує всього шість типів склейок: три для випадку коли G_M ізоморфний G_N і три коли G_M та G_N не є ізоморфними.

В процесі роботи створено алгоритм знаходження таких склейок, який було реалізовано на мові програмування java script. В результаті обрахунків отримано 93 варіанти склейок графів на п'яти вершинах: 2-листковий + 2-листковий: 23; 3-листковий + 3-листковий: 24; 4-листковий + 4-листковий: 2; 2-листковий + 3-листковий: 30; 3-листковий + 4-листковий: 10; 4-листковий + 2-листковий: 4; яким відповідає 93 склейки компактних многовидів з п'ятьма компонентами межі.

Д. М. Скочко та В. В. Мороз висловлюють подяку науковому керівнику Пришляку О.О. за постановку задачі та надання цінних рекомендацій для її вирішення.

Список літератури

[1] О. О. Пришляк *Топологические свойства функций на двух- и трехмерных многообразиях. Топологическая классификация функций*, - Palmarium academic publishing.-2012.- с.86-90.

[2] О. О. Пришляк *Эквивалентность $m-$функций на трехмерных многообразиях с углами*, - Доклада НАНУ.-2000.-№6.-с.22-26.

Про нормальні нескінченно малі конформні деформації поверхонь

Ю. С. Федченко

(Одеська національна академія харчових технологій, Одеса, Україна)

E-mail address: Fedchenko_ Julia@ukr.net

Продовжено дослідження нескінченно малих конформних деформацій поверхонь ([1], [2], [3]) за деяких обмежень на тип деформації.

Основні рівняння нескінченно малих конформних деформацій поверхонь через компоненти вектора зміщення $\overline{U}(x^1, x^2) = u_i \overline{r}^i + \overset{0}{u}\, \overline{n}$ мають вигляд

$$\nabla_j u_i + \nabla_i u_j - 2 \overset{0}{u}\, b_{ij} = 2\varphi g_{ij},$$

де g_{ij}, b_{ij}-коефіцієнти першої та другої квадратичних форми відповідно, $\varphi(x^1, x^2)$- функція конформності.

Деформації, для яких $u_i = 0$, $\overset{0}{u} \neq 0$ називатимемо нормальними. Вивчаємо нескінченно малі конформні деформації поверхонь $\varphi(x^1, x^2) \neq const$, що є нормальними.

Теорема 1. *Нормальні нескінченно малі конформні деформації допускають поверхні, для яких* $b_{ij} = Hg_{ij}, (H = const \neq 0)$ *і лише вони. При цьому вектор зміщення має вигляд* $\overline{U} = -\dfrac{\varphi}{H}\overline{n}$.

Для нормальних нескінченно малих конформних деформацій розглянуто задачі на збереження повної та середньої кривин поверхні.

Список літератури

[1] Е. Д. Фесенко *Бесконечно малые конформные деформации замкнутых поверхностей положительной гауссовой кривизны* . - Изв. вузов Матем., (1969), 3, С. 72-77.

[2] Ю. С. Федченко *Про нескінченно малі конформні деформації мінімальних поверхонь зі збереженням середньої кривини.* - Праці міжнародного геометричного центру, (2012), Т. 5, №3-4, С. 24-31.

[3] Ю. С. Федченко *Про існування нескінченно малих конформних деформацій поверхонь.* - Мат. вісник НТШ, (2013), 10, С. 115-121.

Методична компетентність майбутнього вчителя математики суспільно-гуманітарного профілю навчання: зміст поняття

О. С. Чуприна

(ДЗ «ПНПУ ім. К.Д.Ушинського», Одеса, Україна)

E-mail address: elena-chuprina@inbox.ru

Системність процесу формування методичної компетентності забезпечується зокрема, його спрямованістю на опанування студентом системи методичних компетенцій як суспільно заданих вимог до обсягу й рівня засвоєння сукупності методичних знань, навичок, умінь, ціннісних орієнтацій та досвіду виконання молодим фахівцем різних видів методичної діяльності. Сучасний стан підготовки майбутніх вчителів у педагогічних ВНЗ, підходи до її удосконалення висвітлюються у працях І. Акуленко, Н. Бібік, Н. Глузман, С. Івашньової, О. Ігна, Н. Кічук, З. Курлянд, А Кузьминського, О. Лебедєвої, А. Мормуль, Л. Пєтухової, О. Скафи, С. Скворцової, Н. Тарасенкової, А. Хуторського та ін. Науковці по-різному трактують методичну компетентність майбутнього вчителя, але одностайної думки щодо визначення поняття у галузі навчання математики на рівні стандарту досі немає.

У роботі [2] є спроба окреслити зміст поняття «методична компетентність» як систему наукових, психологічних, педагогічних і предметних знань та професійно-методичних умінь, які базуються на знаннях дидактичних методів, принципів і прийомів та сприяють формуванню всіх компонентів професійної компетентності. Таке визначення, вважає А. М. Мормуль, може бути використаним у подальшому дослідженні професійної підготовки майбутнього вчителя гуманітарного профілю. В авторефераті А. М. Волощук тлумачить методичну компетентность учителів гуманітарного профілю як здатність ефективно будувати навчально-виховний процес на гуманістичних засадах, що ґрунтується на системі спеціально-наукових, психолого-педагогічних, методичних знань, професійно-методичних умінь і навичок, індивідуально-психологічних характеристик і досвіді їх використання в процесі професійної діяльності [1].

Керуючись загальною метою підготовки вчителя у вищому педагогічному навчальному закладі вважаємо, що термін «підготовка майбутнього вчителя» доцільно використовувати у двох аспектах: як процес набуття майбутнім вчителем професійної компетентності і як результат процесу підготовки, що відповідає бажаному рівню сформованості професійної компетентності. Таким чином, під методичною компетентностью майбутнього вчителя математики ми розуміємо базу сформованих методичних, педагогічних, спеціально-наукових, дидактичних знань і накопичених умінь та досвіду у використанні їх в професійній діяльності. Дане визначення може використовуватися для підготовки майбутніх учителів математики суспільно-гуманітарного профілю навчання.

Список літератури

[1] А. М. Мормуль. Методична компетентність майбутніх учителів гуманітарного профілю як педагогічна проблема // Вісник Житомирського державного університету, №43, (2009), С. 176-179.

[2] А. М. Волощук. Формування методичної компетентності майбутніх учителів гуманітарного профілю у процесі педагогічної практики: автореф. дис. на здоб. наук. ступеня кандит. пед. наук. : спец. 13.00.04; [Житомирський державний університет імені Івана Франка], Ж., (2012), 8 с.

Спрямованість навчально-методичного комплексу дисципліни «Вища математика» на розвиток аналітичного мислення студентів

В. В. Онищенко

(ДУТ, Київ, Україна)

E-mail address: oviva@ukr.net

С. М. Шевченко

(ДУТ, Київ, Україна)

E-mail address: sn-shevchenko65@ya.ru

На сучасному етапі міжнародний досвід свідчить про зростання ролі фундаментальної підготовки студентів технічних університетів, зокрема математичної. Є очевидним, що саме математика формує логіку -– універсальний елемент мислення. Уміння правильно здійснити аналіз ситуацій та зробити висновки шляхом логічних роздумів; уміння відрізняти відоме від невідомого, доведене від недоведеного; уміння класифікувати, узагальнювати, висловлювати гіпотези, спростовувати їх або підтверджувати системою логічних міркувань, користуватися аналогіями – така розумова діяльність характеризує висококваліфікованого спеціаліста з інформаційних технологій. Все назване дає ефект розвитку аналітичного мислення та особистості в цілому. Отже, задача вищої школи – здійснити необхідні зміни в організації та проведенні навчальних аудиторних та позааудиторних занять, під час яких буде успішно здійснюватися аналітико-синтетична діяльність студентів.

На виконання цих вимог викладачами кафедри вищої математики Державного університету телекомунікацій було розроблено і впроваджено у навчальний процес навчально-методичний комплекс дисципліни «Вища математика». Даний комплекс містить робочу програму дисципліни, тексти лекцій, навчальні посібники, лабораторний практикум [1], варіанти розрахунково-графічних робіт та зразки їх розв'язання, типові трьохрівневі контрольні роботи, питання та задачі до іспиту (заліку), задачі підвищеної складності, тести [2].

Стрімкий розвиток сучасних інформаційних технологій відкрив нові перспективи у сфері освіти: з'явилася можливість необмеженого тиражування навчальної літератури, швидке та адресне її представлення, автоматизований контроль та самоконтроль. Впровадження програмного комплексу MOODLE дозволило максимально забезпечити взаємодію між викладачами та студентами як денної, так і інших форм навчання.

Як підсумок, потрібно відмітити, що електронний навчально-методичний комплекс дисципліни «Вища математика» пройшов успішно апробацію у процесі вивчення математики денної, заочної та дистанційної форм навчання.

Список літератури

[1] Барабаш О.В., Онищенко В.В. *Лабораторний практикум з вищої математики. Ч.1, 2 Навчальний посібник.* / О.В. Барабаш, В.В. Онищенко. — К.: ДУТ, 2015. — 113 с., 102 с.

[2] Шевченко С.М. *Розвиток аналітичного мислення студентів вищих технічних навчальних закладів у процесі вивчення математичних дисциплін: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. пед. наук: спец. 13.00.02 – теорія та методика навчання (математика)* . – К.: НПУ ім. М.П.Драгоманова, 2013. – 20 с.

Solitonic solutions of the time-dependent Schrödinger equation: Analysis and prediction of regular and chaotic evolution

P. G. Bashkaryov

(OSENU, Odessa, Ukraine)

E-mail address: quantber@mail.ru

At present time an active development was received development of geometry of a chaos (see, for example, [1]). One should mention studying multiple dynamical systems in mathematics, physics, chemistry etc as a perspective fields for application of geometry of a chaos [2], [3]. The main purpose of our work is an employing a variety of techniques for characterizing dynamics of the nonlinear solitonic systems identifying the presence of chaotic elements. We consider the temporal solitonic solutions of the time-dependent Schrödinger equation. To analyze calculated temporal evolution of the time-dependent Schrödinger equation soliton we use the different techniques, in particular, correlation integral analysis, mutual information approach, false nearest neighbour algorithm, Lyapunov exponent's analysis, and surrogate data method etc (see details for example, in [3].

As usually, the phase space of the system is reconstructed by delay embedding. The mutual information approach, correlation integral analysis, false nearest neighbour algorithm, Lyapunov exponent's analysis, and surrogate data method are used for comprehensive characterization of chaotic behaviour and computing topological and dynamical invariants. The correlation dimension method provided a low fractal-dimensional attractor thus suggesting a possibility of the existence of chaotic behaviour of the time-dependent Schrödinger equation soliton. Statistical significance of the results is confirmed by testing for a surrogate data. The next important result is connected with the firstly realized forecasting temporal evolution of the time-dependent Schrödinger equation soliton which has been preformed within the combined chaos-geometric and nonlinear prediction model [4], [5]. The basic idea of the prediction method of chaotic properties of the system is in the use of the traditional concept of a compact geometric attractor in which evolves the computed (measured) data, plus the implementation of neural network algorithm of predicted trajectories.

References

[1] A. Glushkov *Methods of a Chaos Theory.*,- Odessa,OSENU, (2013), 400p.

[2] A. Lichtenberg, A. Liebermann, *Regular and chaotic dynamics.*,- N.-Y., Springer, (1992).

[3] H. Abarbanel, *Analysis of observed chaotic data.*,- N.-Y., Springer, (1996).

[4] A. Glushkov, A. Svinarenko et al *Chaos-geometric attractor and quantum neural networks approach to simulation chaotic evolutionary dynamics.*,- Adv. in Neural Networks, Fuzzy Systems and Artificial Intelligence, Ser.: Recent Adv. in Computer Engineering,. 21, (2014), P.143-150.

[5] O. Khetselius *Forecasting evolutionary dynamics of chaotic systems using advanced non-linear prediction method.*,- Dynamical Systems Applications. 2, (2013), P.145-152.

A pseudoboundary in the hyperspace of max-plus convex sets

Lidiya Bazylevych, Aleksandr Savchenko

E-mail address: `izar@litech.lviv.ua, savchenko1960@rambler.ru`

Given $x, y \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, and $\lambda \in \mathbb{R}$, we denote by $x \oplus y$ the coordinatewise maximum of x and y and by $\lambda \odot x$ the vector obtained from x by adding λ to each of its coordinates. A subset A in $\mathbb{R}^n$ is said to be max-plus convex if $\alpha \odot a \oplus \beta \odot b \in A$ for all $a, b \in A$ and $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ with $\alpha \oplus \beta = 0$ (see [1]). Geometry of the max-plus convex sets is considered in different publications (see, e.g., [2, 3]).

We denote the hyperspace of all nonempty max-plus convex compact subsets in $\mathbb{R}^n$ by $\mathrm{mpcc}(\mathbb{R}^n)$. In [4] it is proved that $\mathrm{mpcc}(\mathbb{R}^n)$ is homeomorphic to $Q \setminus \{\text{point}\}$, for all $n \geq 2$. Here Q denotes the Hilbert cube, $Q = [0, 1]^\omega$.

Let σ denote the set of finite sequences in Q. We also denote by $\mathrm{mpcc_p}(\mathbb{R}^n)$ the subset in $\mathrm{mpcc}(\mathbb{R}^n)$ consisting of all polyhedral compact max-plus convex sets.

The main result of the talk is the following: the pair $(\mathrm{mpcc}(\mathbb{R}^n), \mathrm{mpcc_p}(\mathbb{R}^n)$ is homeomorphic to the pair $(Q \setminus \{\text{point}\}, \sigma \setminus \{\text{point}\})$.

A similar question can be considered also for the hyperspace of the so called max-min compact convex sets [5].

References

[1] K. Zimmermann *A general separation theorem in extremal algebras.*- Ekon.-Mat. Obz. 13 (2) (1977), 179–201.

[2] S. Gaubert, R.D. Katz *The Minkowski theorem for max-plus convex sets.*- Lin. Algebra Appl. 421(2007), Issues 2–3, 356–369.

[3] V. Nitica and I. Singer *Max-plus convex sets and max-plus semispaces. I. Optimization.*- 56(1–2)(2007), 171—205.

[4] L.E. Bazylevych *Hyperspaces of max-plus convex compact sets.*- Mat. Zametki 84 (5) (2008), 658–666 (in Russian).

[5] V. Nitica, I. Singer *Contributions to max–min convex geometry. I: Segments.*- Linear Algebra and its Applications, 428 (2008), Issue 7, 1439–1459.

Geometry of a quantum chaos: Chaotic elements in dynamics of atomic systems in an external electromagnetic field

V. V. Buyadzhi

(OSENU, Odessa, Ukraine)

E-mail address: vbuyad@mail.ru

It is well known that dynamics of the quantum systems in external electromagnetic field has features of the random, stochastic kind and its realization does not require the specific conditions. The importance of studying a phenomenon of stochasticity or quantum chaos in dynamical systems is provided by a whole number of scientific and technical applications, including a necessity of understanding chaotic features in a work of different quantum ionformatics and neuro-cybernetics systems. New field of investigations of the quantum and other systems has been provided by a great progress in a development of a chaos theory methods [1], [2]. In previous our papers [3], [4] have given a review of new methods and algorythms to analysis of different systems of quantum mechanics, optics and informatics.

In this paper we have used the nonlinear method of chaos theory and the recurrence spectra formalism to study quantum stochastic futures and chaotic elements in dynamics of atomic systems in the external electromagnetic fields. We present new approach to the universal quantum-dynamic and chaos-geometric modelling and analysis of the chaotic dynamics of nonlinear processes in atomic systems in intense electromagnetic fields and some quantum-informatics systems. In order to make modelling chaotic dynamics it has been constructed improved complex system (with chaos-geometric, neural-network, forecasting, etc. blocks) that includes a set of new quantum-dynamic models and partially improved non-linear analysis methods including correlation (dimension D) integral, fractal analysis, average mutual information, false nearest neighbours, the Luapunov exponents, Kolmogorov entropy, power spectrum, surrogate data, nonlinear prediction, predicted trajectories, neural network methods etc.

As applicatin of presented method we have carried out computing energies, spectral parameters, resonance widths etc for caesiym and ytterbium atoms in a strong dc and ac electric field and found anti-crossings, complex power spectra with chaotic elements (inducing nonlinear resonances, then, their strong interaction, creating stochastic layers and global stochasticity).

References

[1] M. Gutzwiller *Chaos in Classical and Quantum Mechanics.*,- N.-Y., Springer, (1990).

[2] A. Glushkov *Methods of a Chaos Theory.*,- Odessa,OSENU, (2013), 400p.

[3] A. Glushkov, A. Svinarenko, V. Buyadzhi et al *Chaos-geometric attractor and quantum neural networks approach to simulation chaotic evolutionary dynamics.*,- Adv. in Neural Networks, Fuzzy Systems and Artificial Intelligence, Ser.: Recent Adv. in Computer Engineering,. 21, (2014), P.143-150.

[4] G. Prepelitsa, A. Glushkov, V. Buyadzhi et al *Chaotic dynamics of non-linear processes in atomic and molecular systems in electromagnetic field: new approaches, uniformity and charm of chaos*,- Sensor Electr.and Microsyst.Techn, 11,N4 (2014), P.43-57.

Advanced algorithm in quantization of the quasi-stationary states for the many-body Dirac equation and computing the dielectronic satellites spectra of three-quasiparticle systems

Yu. G. Chernyakova

(OSENU, Odessa, Ukraine)

E-mail address: quantche@mail.ru

We present an advanced numerical algorithm to computing energy spectra of N-particle finite quantum (atomic) systems and implemented new scheme of quantization of the stationary (quasi-stationary) states of the Dirac-Fock equation. In difference of our previous similar self-conjunctive versions [1], new method has a few new elements which provide its more effectiveness. First element is implementation of the ab initio version of the quantum electrodynamics perturbation theory for the N-quasi-particle systems with using optimized, gauge invariant Dirac-Fock equation relativistic orbital basis's generation scheme [2]; second point is using an advanced algorithm in quantization of the quasi-stationary states for the many-body Dirac equation an advanced procedure of the Fano-Byorke type [3] for calculating the perturbation operator matrix elements between the N-quasi-particle states and at last an accurate accounting the complex exchange-correlation effects by using the mnost effective many-body density dependent functionals [3]. The corresponding theorem establishing a link between gauge non-invariant contributions into the matrix elements and quality of the relativistic eigen functions basis of the corresponding Dirac-Fock Hamiltonian is proven.

As applicatin of a new approach we present the results of computing energy and spectral parameters for dielectronic satellites of in spectra of the alkali-elements multicharged ions. There are ;isted new data on the spectra levels energies, different contributions of the relativistic and exchange-correlation corrections, line intensities distribution for transitions between configurations with great number of lines [3]. For comparison there are listed the test data obtained within different methods, namely, multi-configuration Dirac (Hartree)-Fock calculation, standard and advanced density-functional theories. It has been shown that a new approach provides quite high accuracy in comparison with the stadard methods and is to be most effective in studying the complex configurations, where it is realized an intermediate case [3].

References

[1] Yu. G. Chernyakova et al *Estimating the tokamak parameters by means high resolution theoretical spectroscopy method.*,-Photoelectr. 19: 1, (2010), P. 107-110.

[2] Yu. G. Chernyakova, Yu. V. Dubrovskaya, T. A. Florko, et al, *An advanced approach to quantization of the quasistationary states of Dirac-Slater equation.*,-Proceedings of International Geometry Center. 6: (2013), P.29-34.

[3] A. V. Glushkov *Relativistic Quantum Theory.*,- Odessa, Astroprint, (2008), 700p.

Quantization of the quasistationary states for the Dirac-Slater equations with density dependent forces and a new scheme to computing the beta-decay probabilities

Yu. V. Dubrovskaya

(OSENU, Odessa, Ukraine)

E-mail address: nucdubr@mail.ru

This work goes on studying and development of a new effective numerical approach to problem of quantization of states of the relativistic equations and further using the corresponding eigen function basis in the calculations of the permitted beta-transitions by means of the golden Fermi-rule [1]. In this paper we present a new effective scheme to quantization of the stationary (quasi-stationary) states for the Dirac-Slater equation (see [2] with density dependent forces and on its basis develop a new numerically effective approach to computing the beta-decay characteristics. Dedspite of earlier developed models (see [1]) the present model has a few advantages. Firstly it is based on more effective Dirac-Slater equation model of a self-consistent field in atomic systems from the computational viewpoint. Secondly, it contains a new element connected with introducing the consistent density dependent functionals into the Dirac-Slater equation in order to take into account as the one-particle as the many-particle correlation effects. Further we have used an effective procedure (see [3] for construction of the optimized sets of the Dirac-Slater equation eigen functions and correspondingly eigen values. In order to provide and check fulfilling the gauge invariance under solving the optimized Dirac-Slater equation with density dependent forces, the QED gauge-invariant approach [3] and the Yord equalities have been used. Besides, it has been performed an accurate analysis of quality and accuracy of the computed eigen values and eigen functions sets.

As an example, a new Dirac-Slater approach with density dependent forces is applied to computing the beta-decay parameters of a set of the permitted beta transitions for some middle and heavy elements. As usually (see, for example, [1]), the correction due to the finite size of a nucleus (the charge distribution in a nucleus is modelled within the known Gauss and Fermi models) is accounted for in the zeroth approximation of the Dirac-Slater equation perturbation theory in an electric and vacuum-polarization potentials, which are substituted to the effective Dirac-Salter equations (i.e on the non-perturbative basis) [3]. Computing for superpermitted transitions has demonstrated an excellent agreement between theoretical and experimental data. Calculation of the effect for the atomic self-consistent field type on the Fermi function shows that for little and intermediate values of nuclear charge Z a difference in the data, provided by different methods is quite little, however for big Z (for example, ^{241}Pu-^{241}Am) it becomes quite significant. It fully corresponds to earlier obtained results [1].

References

[1] A. V. Glushkov, Yu. V. Dubrovskaya *QED theory of multiparticle Fermi systems.*,- // Recent Advances in Theory of Phys. and Chem. Systems. Progress in Methods and Applications, Ser. Progress in Theoretical Chemistry and physics. - Berlin, Springer. vol.15, (2006), P. 301-328.

[2] J. Slater *Methods of self-consitent field in theory of molecules and solids.*,- Wiley, (1974), 650p.

[3] A. V. Glushkov *Relativistic Quantum Theory.*,- Odessa, Astroprint, (2008), 700p.

Fréchet Lie algebroids and their cohomology

K. Eftekharinasab

E-mail address: kaveheft@gmail.com

Let F be a Fréchet space and $\mathcal{B}$ a bornology on F containing all compact subsets. Assume that $\mathcal{B}$ is chosen such that $T(\mathcal{B}) \subset \mathcal{B}$ for all continuous linear endomorphisms T of F. Let M be a manifold modelled on F and $F'_{\mathcal{B}}$ the dual of F endowed with the topology of compact convergence. The $\mathcal{B}$-cotangent bundle of M is defined as $TM'_{\mathcal{B}} \bigcup_{x \in M} (T_{xM})'_{\mathcal{B}}$, where T_{xM} is the tangent space at $x \in M$. $TM'_{\mathcal{B}}$ is the vector bundle in the category of locally convex spaces [?]. Thus, we are able to define the generalized tangent bundle as the Whitney sum $\mathbb{T}M = TM \oplus TM'_{\mathcal{B}}$. Weak symplectic and Poisson structures for M were investigated in [?]. The summery of our results are as follows.

A Fréchet Lie algebroid is defined as a triple $(E, [\cdot,\cdot], \rho)$ consisting of a vector bundle E over a manifold M, together with a Lie bracket $[\cdot,\cdot]$ on its module of sections $\Gamma(E)$ and a morphism of vector bundles $\rho : E \to TM$, called the anchor, such that the anchor and the bracket are to satisfy the Leibniz rule and the induced map $\rho : (\Gamma(E), [\cdot,\cdot]_E) \to (\mathfrak{X}(M), [\cdot,\cdot])$ is a Lie algebra homomorphism. Here $\mathfrak{X}(M)$ is the space of all vector fields over M. We define Fréchet Courant algebroids exactly as the Banach manifolds case, see [?] for the definition Banach Courant Algebroids.

Let $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ and α, β be differential forms. The Lie derivative $\mathcal{L}_X$ and the contraction map $\imath_Y$ are defined in obvious fashion way. Now define the bracket $[X, Y]_{\mathbb{T}M} = ([X, Y], \mathcal{L}_X\beta - (\imath_Y \circ \mathrm{d}_{\mathrm{dR}}\, \alpha))$ and the anchor $\lambda_{\mathbb{T}M}$ given by $\lambda_{\mathbb{T}M}(X, \alpha) = X$. If we define $\Delta_{\mathbb{T}M}((X, \alpha), (Y, \beta)) = \alpha(Y) + \beta(X)$, then $(\mathbb{T}M, [X, Y]_{\mathbb{T}M}, \lambda_{\mathbb{T}M})$ is Courant Lie algebroid. A vector subbundle $\mathbb{D}$ of the Courant algebroid $\mathbb{T}M$ that coincides with its orthogonal complement $\mathbb{D}^{\perp}$ with respect to $\Delta_{\mathbb{TM}}$ is said to be an almost Dirac structure. It is called a Dirac structure if, in addition, is closed under the bracket $[\cdot,\cdot]_{\mathbb{TM}}$. We showed that the Dirac structure inherits the Lie algebroid structure from the Courant bracket.

Let (M, ω) be a weakly symplectic Fréchet manifold and $\Omega^k(M)$ the spaces of k-forms. Define a morphism

$$\omega : \Omega^1(M) \to \mathfrak{X}^1(M);\ \beta(\omega(\alpha)) = \omega(\alpha, \beta),\ \forall \alpha, \beta \in \Omega; 1(M). \tag{1}$$

The weak symplectic form ω induces a unique lie bracket of 1-forms given by

$$\{\alpha, \beta\} = \mathcal{L}_{\omega(\alpha)}\beta - \mathcal{L}_{\omega(\beta)}\alpha - \mathrm{d}_{\mathrm{dR}}\, \omega(\alpha, \beta). \tag{2}$$

This bracket defines a Lie algebroid structure on the $\mathcal{B}$-cotangent bundle $TM'_{\mathcal{B}}$ with the anchor $\omega : TM'_{\mathcal{B}} \to TM$ which is given by $\beta(\omega(\alpha)) = \omega(\beta, \alpha);\ \alpha, \beta \in TM'_{\mathcal{B}}$. We then define Chevally-Eilenberg cohomology associated to $TM'_{\mathcal{B}}$. The bracket (**??**) detrmines also the Lichnerowicz-Poisson cohomology of M and we have

Theorem 1. *The Lie algebroid cohomology of the $\mathcal{B}$-cotangent bundle Lie algebroid is the Lichnerowicz-Poisson cohomology of M.*

References

[1] T. Wurzacher, *Fermionic Second Quantization and the Geometry of the Restricted Grassmannian.*, Infinite dimensional Kähler manifolds (Oberwolfach, 1995), DMV Sem., 31, Birkhäuser, Basel, (2001), 287-375.

[2] M. Anastasiei, *Dirac structures in Banach Courant Algebroids.*, Romai J.,**8** (2012), no 2, 1-6.

Quantization of the quasi-stationary states for the many-body Dirac equation with Hellmann model potential and computing the radiative decay widths

T. A. Florko

(OSENU, Odessa, Ukraine)

E-mail address: quantflo@mail.ru

Our work goes on our studying the problem of quantization of the stationary and quasi-stationary states for the corresponding relativistic Dirac-like equations and precise calculating the radiative decay widths and corresponding probabilities. The most known computational methods such as the multi-configuration Hartree-Fock and Dirac-Fock ones provide widespread computing the energy eigen values and different spectral parameters for many-body atomic systems. From the computational viewpoint, these methods do not often allow to reach a high accuracy simultaneously with computational effectiveness. Here the serious numerical problems are connected with correct definition of the high-order correlation corrections, sing the gauge-noninvariant procedures of generating relativistic orbital basis's etc [1].

Here we develop an alternative approach to computing the energy eigen values and different spectral parameters for many-body atomic systems, which is based on direct implementation of the model potential method within the traditional Dirac-like relativistic schemes. We carried out a new effective procedure for quantization of the stationary and quasi-stationary states for the corresponding Dirac-like equation with Hellmann model potential. Starting from this model and the relativistic energy approach combined with gauge-invariant QED perturbation theory formalism [1] we re-develop a precise approach to calculating the (permitted and forbidden) radiative decay widths and probabilities of transitions in spectra of such relativistic systems as multicharged ions [2]. The theorem establishing a link between the asymptotic properties of the Dirac-Hellmann operator eigen functions and minmax estimates of the corresponding radiative transition integrals is proven. As the test application, we have preformed computing the energies, transition probabilities, radiation decay widths for E1,E2,M1 transitions in spectra of the Sodium-like ions (Z=15-36). There is performed a detailed comparison of received energy and spectral data with available alternative theoretical and experimental results for the cited systems.

References

[1] A. V. Glushkov *Relativistic Quantum Theory.*,- Odessa, Astroprint, (2008), 700p.

[2] T. A. Florko *Quantum geometry: new numerical approach to quantization of the quasistationary states of Dirac-Fock equation.*,- Proc.Int.Geometry Center. 5: 3, (2010), P. 32-38.

[3] A. V. Glushkov, T. A. Florko et al *Optimized perturbation theory scheme for calculating the interatomic potentials and hyperfine lines shift.*,- Int.J. Quant. Th. 109: 4, (2009), P.3325-3332.

Advanced approach to quantization of quasi-stationary and resonant states for many-body Dirac and Klein-Gordon-Fock equation: Collision problem

A. V. Glushkov

(OSENU, Odessa, Ukraine)

E-mail address: `dirac13@mail.ru`

It is developed an advanced operator approach to quantization of the quasi-stationary (scattering, resonance) states of relativistic many-body Dirac and Klein-Gordon-Fock equations for three classes of non-stationary and collision tasks. Earlier we have developed an effective operator approach to quantization of the quasi-stationary (scattering, resonant) for Dirac equations in a class of non-stationary tasks. New algorithm has been developed and based on the gauge-invariant QED perturbation theory with the gauge-invariant zeroth approximation and mapped Fourier grid technique [1]. We make more advanced an computational block of an approach to take into account the many-body correlations in the quantum systems, significant contribution of high-lying Rydberg, autionization, resonant states in spectrum of the energy eigen-values of the total Hamiltonian plus a continuum pressure [2]. The generalized Grant theorem is proved.

As application of an advanced approach we calculate the radiation decay probabilitity and low-energy collision cross-section as an imaginary part of the complex energy of the whole compound system with using relativistic energy approach and S-matrix Gell-Mann and Low adiabatic formalism [4]. Besides, a general theorem limiting the asymptotic behaviour of the collision cross-section at infinite energy for systems, described by the Dirac and Klein-Gordon-Fock equations.

References

[1] A. V. Glushkov, *Operator perturbation theory for quantum systems in a strong AC/DC electric field.*,- Advances in Quantum Methods and Applications in Chemistry, Physics, and Biology (Springer). 27: (2013), P. 161-198.

[2] A. V. Glushkov *Relativistic Quantum Theory.*,- Odessa, Astroprint, (2008), 700p.

[3] A. V. Glushkov, O. Yu. Khetselius, A. A. Svinarenko *Frontiers in Quantum Systems in Chem. And Physics.*,- Progress in Theoretical Chemistry and Physics (Springer). 18 : (2008), P. 505-570.

[4] A. V. Glushkov, *Advanced relativistic energy approach to radiative decay processes in multielectron systems.*,- Quantum Systems in Chemistry and Physics: Progress in Methods and Applications (Springer). 26: (2012), P. 231-254.

Geometry of a Chaos: New advanced approach to treating a deterministic chaos in complex dynamical systems

A. V. Glushkov

(OSENU, Odessa, Ukraine)

E-mail address: dirac13@mail.ru

V. M. Kuzakon

(ONAFT, Odessa, Ukraine)

E-mail address: kuzakon-v@ukr.net

A. V. Smirnov

(OSENU, Odessa, Ukraine)

A. V. Duborez

(OSENU, Odessa, Ukraine)

Within geometry of a chaos we present new advanced approach to treating a deterministic chaos in the complex dynamical systems, which includes new or available advanced techniques such as the predictors trajectories algorithm, stochastic Green's functions method, multi-fractal geometry methods, including the fractal Green's functions one, advanced averaged mutual information scheme, correlation integral analysis, false nearest neighbour algorithm, Lyapunov's exponent's analysis, improved surrogate data method version etc [1], [2]. The chaos-geometrical approach is designed for analyzing the space-temporary data series in modelling interactions in a complex dynamical system of any physical nature [3] and formal search of characteristic features of chaotic behaviour of the system. The predictors trajectories algorithm, stochastic Green's functions and optimal propagators methods provide an effective basis for high-qualitative forecasting evolution of the low- and even high-attractors dynamical systems.

As a concrete example, we studied the nonlinear dynamics of some geophysical systems (temporal series of cosmic rays intensities and concrete sets of seismological data) in order to discover and detect a chaos elements plus provide an effective high-quality forecasting of the temporal system evolution. The most interesting numerical data are in discovering as a weak chaos as hyperchaos regimes [4]. There have been presented the temporal dependences of the output signal amplitude, phase portraits, statistical quantifiers for a weak chaos arising via period-doubling cascade of self-modulation and for developed chaos at large values of the dimensionless length parameter. .

References

[1] H. Schuste *Deterministic Chaos: An Introduction.*,- Wiley, N.-Y., (2005), 312p.

[2] A. V. Glushkov *Methods of a Chaos Theory.*,- Odessa, OSENU, (2013), 400p.

[3] A. Glushkov, V. Kuzakon et al *Modeling of interaction of the non-linear vibrational systems on basis of temporal series analyses.*,- Dyn.Systems - Theory and Appl. 1: (2011), P.31-38.

[4] A. Glushkov, A. Svinarenko et al *Chaos-geometric attractor and quantum neural networks approach to simulation chaotic evolutionary dynamics.*,- Adv. in Neural Networks, Fuzzy Systems and Artificial Intelligence, Ser.: Recent Adv. in Computer Engineering,. 21: (2014), P.143-150.

On Barker-Larman problem for convex polygons in the hyperbolic plane

V. Gorkavyy, D. Kalinin

(B. Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering, Kharkiv, Ukraine)

E-mail address: `gorkaviy@ilt.kharkov.ua`

Our short communication is devoted to a conjecture proposed by J.A. Barker and D.G. Larman in frameworks of the geometric tomography theory [1], [2].

Conjecture. *Let P, Q, $M \subset \mathbb{R}^n$ be convex bodies such that M belongs to the interiors of P and Q. Assume that whenever $H \subset \mathbb{R}^n$ is a hyperplane supporting M, the $(n-1)$-volumes $vol(P \cap H)$ and $vol(Q \cap H)$ are equal. Then P coincides with Q.*

Actually this problem remains open, the answer is known for some particular cases only. For instance, the Barker-Larman conjecture is shown to be true if P, Q are convex polygons and M is a strongly convex centrally-symmetric body with analytical boundary in $\mathbb{R}^2$, see [3], or if P, Q are convex polyhedra and M is a ball in $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, see [4].

We are interested whether the Barker-Larman conjecture holds true for convex bodies in non-Euclidean geometries like the hyperbolic one. The theorem bellow affirms the Barker-Larman conjecture for convex polygons in the hyperbolic plane $\mathbb{H}^2$.

Theorem. *Let P, $Q \subset \mathbb{H}^2$ be convex polygons, which contain a disk Ω of radius $t > 0$ in their interiors. Assume the lengths of segments $P \cap \tau$ and $Q \cap \tau$ are equal for every geodesic $\tau \subset \mathbb{H}^2$ tangent to the circle $\Sigma = \partial\Omega$. Then P coincides with Q.*

The proof is based on ideas developed by V. Yaskin in [4] for convex polygons in the Euclidean plane. The principal observation, which follows from the proof, is that the Barker-Larman conjecture in the two-dimensional case does not depend on the particular metric structure of $\mathbb{R}^2$ or $\mathbb{H}^2$. Apparently, one can accomplish the proof for a large class of metric spaces realized in terms of $\mathbb{R}^2$ or domains of $\mathbb{R}^2$ equipped with non-Euclidean distance functions possessing generic analyticity properties. We discuss the case of $\mathbb{H}^2$ just as a simple and illustrative example only.

A more general case of convex polyhedra in $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, was treated in [4] in a slightly different manner, so it would be interesting to adapt V. Yaskin's technics in order to prove a multi-dimensional analogue of the theorem for convex bodies in $\mathbb{H}^n$ or in other non-Euclidean metric spaces with dimension $n \geq 3$.

References

[1] J. A. Barker, D. G. Larman *Determination of convex bodies by certain sets of sectional volumes.* - Discrete Mathematics, (2001), 241, P. 79-96.

[2] D. Ryabogin, V. Yaskin, A. Zvavitch *Harmonic Analysis and Uniqueness Questions in Convex Geometry.* - Recent Advances in Harmonic Analysis and Applications, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, (2013), 25, P. 327-337.

[3] G. Xiong, Y. Ma, W. Cheung *Determination of convex bodies from Γ-section functions.* - J. Shanghai Univ., (2008), 12:3, P. 200-203.

[4] V. Yaskin *Unique determination of convex polytopes by non-central sections.* - Mathematische Annalen, (2011), 349:3, P. 647-655.

A pseudo-spherical surface in $\mathbb{R}^4$ does not admit two different Bianchi transformation

V. Gorkavyy, O. Nevmerzhitska

(B. Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering, Kharkiv, Ukraine;
V. Karazin Kharkiv National University, Kharkiv, Ukraine)

E-mail address: gorkaviy@ilt.kharkov.ua

Let F^2 be a pseudo-spherical surface of constant negative Gauss curvature $K \equiv -k_0^2$ in the four-dimensional Euclidean space $mathbbR^4$. Given a horocyclic parametrization $r(u, v)$ of F^2, when the metric form of F^2 reads $ds^2 = du^2 + e^{-2u}dv^2$, consider a transformation $\psi : F^2 \to \tilde{F}^2$ represented by the formula $\tilde{r} = r + \frac{\partial r}{\partial u}$. Similarly to the classical theory of surfaces in $\mathbb{R}^3$, the transformation ψ is called *the Bianchi transformation* of F^2 [1]. For surfaces in $\mathbb{R}^3$ the Bianchi transformation preserves the pseudo-sphericity, the transformed surface has the same Gauss curvature as the initial one[2]. For surfaces in $\mathbb{R}^4$ the situation is quite different: generically the Gauss curvature of $\tilde{F}^2$ is not constant negative [1].

There are two particular classes of pseudo-spherical surfaces in $\mathbb{R}^4$ which admit Bianchi transformations resulting in pseudo-spherical surfaces. One class consists of pseudo-spherical surfaces in $\mathbb{R}^3 \subset \mathbb{R}^4$, any such surface admits a one-parametric continuous family of Bianchi transformations so that the transformed surfaces remain pseudo-spherical and inherit the Gauss curvature. Another class consists of particular pseudo-spherical surfaces in $\mathbb{R}^4$, which does not belong to $\mathbb{R}^3 \subset \mathbb{R}^4$ and whose fundamental forms are represented in terms of solutions of a special system of non-linear partial differential equations [G1]. Any such surface admits at most two different Bianchi transformations resulting in pseudo-spherical surfaces. It turns out, that no one of these surfaces admits exactly two different Bianchi transformations resulting in pseudo-spherical surfaces.

Theorem. *Let F^2 be a pseudo-spherical surface in $\mathbb{R}^4$, which does not belong to $\mathbb{R}^3 \subset \mathbb{R}^4$. If F^2 admits a Bianchi transformation $\psi : F^2 \to \tilde{F}^2$ so that the transformed surface $\tilde{F}^2$ is pseudo-spherical too, then this Bianchi transformation is unique.*

The question whether the same uniqueness result holds true for the more general case of *Bäklund transformation* is still open.

References

[1] Yu. A. Aminov, A. Sym *On Bianchi and Backlund transformations of two-dimensional surfaces in E^4.* - Math. Phys., An., Geom., (2000), 3, P. 75-89.

[2] Yu. A. Aminov *Geometry of Submanifolds.* - Gordon & Breach Science Publ., Amsterdam, (2001).

[3] В. А. Горькавый *Конгруэнции Бьянки двумерных поверхностей в E^4.* - Математический сборник, (2005), 196:10, P. 79-102.

Quantization of quasistationary states of Schrödinger equation with the Hellmann model potential for diatomic systems in DC electric field

A. V. Ignatenko

(OSENU, Odessa, Ukraine)

E-mail address: `quantign@mail.ru`

This paper continuous our work on analysis probles of eigen functions and values for different operators in application to the two-centre quantum systems in an external field. Here we present a new advanced approach to quantization of quasistationary states of the Schrödinger equation with tow-centre Hellmann model potential for diatonic system in an external DC electric field. As a basic approach we start from the formalism of operator perturbation theory ([1], [2]). Several approaches for quantization of the states of the Schrödinger equation with different forms of the external (for example, DC electric field potential,Stark task, scattering problem etc) potentials are usually used. As a rule, in a case of a strong external field there is arisen a problem of the correct calculating the optimized sets of eigen functions and correspondingly eigen values especially. This task is very complicated for the two-centre systems, where one should realize the separtaion of the variables in the spheroidal coordinates.

Generalization of the operator perturbation theory formalism in application to the diatomic systems is reduced to modification of the differential equation system. The key feature of the approach is that the zeroth order Hamiltonian, possessing only stationary states, is determined only by its spectrum without specifying its explicit form. It is proven the theorem establishing a link between a quality of quasidiscrete states functions and accouning the correlation effects within the Hellmann model potential scheme. The operator perturbation theory basis is used in problem of the full diagonalization of the energy matrice. More simplified version reduces to a search for one eigen-value, which is transited to the state under switching on a field. In this case a solution of determining the maximal eigen-value and the corresponding eigen-vector is realized by usual iterative methods. The results of the test numerical calculations of the simple diatomics are presented and analyzed [3].

References

[1] A. V. Glushkov *Relativistic quantum theory. Quantum mechanics of atomic systems*- Odessa: Astroprint, (2008), P.1-700.

[2] A. Glushkov, A. Ignatenko, S. Ambrosov, D. Korchevsky *Consistent quantum approach to DC strong field Stark effect for non-H systems.*- Int.J.Quant.Ch., (2004), V.99, P.936-946.

[3] A. Ignatenko *Analysis of eigen values and functions quality for the Schrödinger equation with the Hellmann model potential for diatomic systems in DC electric field.*- preprint of Mathematics Department of the OSENU, (2015), N MA-03, P.1-12.

Quantization of states of the relativistic Dirac many-body equation with an electroweak interactions potential and parity nonconservation effect in heavy finite Fermi-systems

O. Yu. Khetselius

(OSENU, Odessa, Ukraine)

E-mail address: nuckhet@mail.ru

In this work we go on our investigation of a problem of the eigen-values spectrum and eigen-functions for an effective relativistic many-body Dirac Hamiltonian of the finite heavy many-body Fermi-systems and further application to quantitative description of the electroweak interactions with calculating the corresponding electro-weak amplitudes for transition, in which the parity non-conservation effect takes a place. Here we present an advanced approach to quantization of the bound and quasistationary states of the relativistic Dirac equation with a non-singular (singular) electromagmetic potential and additional weak interaction potential within generalized nuclear-QED formalism [1]. New element is development of the optimal scheme for calculating electro-weak amplitudes of the transitions with parity non-conservation, provided by e-N electroweak interaction. It is based on relativistic energy approach and QED gauge-invariant many-body perturbation theory with using the optimized one-quasiparticle representation [2]. There are considered the conditions when a gauge invariance of theory is violated. The corresponding theorem is proven.

New approach is applied in calculating the hyperfine structure parameters, parity non-conservation electro-weak amplitudes for a set of the heavy finite Fermi-systems with accounting of exchange-correlation, Breit, weak e-e interactions, radiative and nuclear (magnetic moment distribution, finite size, neutron "skin") corrections, nuclear-spin dependent corrections due to anapole moment, Z-boson ((AnVe) current) exchange, combined hyperfine and Z boson exchange ((VnAe) current) interactions [3]. The first predictions of a weak charge for superheavy elemnts are presented. The data for test systems (caesium etc) are compared with Standad model data.

References

[1] O. Yu. Khetselius *Quantum structure of electroweak interaction in heavy finite Fermi-systems.*,- Odessa, Astroprint, (2011), 452p.

[2] A. V. Glushkov *Relativistic Quantum Theory.*,- Odessa, Astroprint, (2008), 700p.

[3] O. Yu. Khetselius, *Quantum Geometry: New approach to quantization of quasi-stationary states of Dirac equation for relativistic many-body system and calculating some spectral parameters.*,- Proceedings of International Geometry Center. 6, N1: (2013), P.60-66.

On conformal equivalence of functions

N. Konovenko

ONAFT, Odessa, Ukraine

E-mail address: konovenko@ukr.net

We continue [1], [3] to investigate conformal equivalence of functions given on domains in the plane. We found the fields of rational differential invariants of the conformal pseudogroup, acting on functions and use it to get criterion of their equivalence.

The main results given by the following theorems.

Theorem 1. *The field of rational differential $PSL_2(\mathbb{R})$-invariants on the jet spaces of functions on the unit disk is generated by invariants (J_0, J_1, J_2) and their invariant derivatives $\nabla_1^i \nabla_2^j (J_l)$. The field separates regular orbits.*

In this theorem

$$J_0 = u, \quad J_1 = t^2 T, \quad J_2 = T^{-1}(u_{20} + u_{02}),$$

$$\nabla_1 = T^{-1}(u_{10}\frac{d}{dx} + u_{01}\frac{d}{dy}),$$

$$\nabla_2 = T^{-1}(-u_{01}\frac{d}{dx} + u_{10}\frac{d}{dy}),$$

and

$$T = u_{10}^2 + u_{01}^2 \neq 0, \quad t = 1 - x^2 - y^2.$$

This theorem can be also reformulated in terms of the Tresse derivatives [2].

Theorem 2. *The field of rational differential Möbius invariants of functions on the unit disk is generated by invariants $(J_0, J_1, J_{11}, J_{12}, J_2)$ and their Tresse derivatives $\frac{D^{a+b}J}{DJ_0^a DJ_1^b}$, where*

$$J_{11} = \nabla_1(J_1) = \frac{2}{T}\Big((u_{10}^2 u_{20} + 2u_{10}u_{01}u_{11} + u_{01}^2 u_{02}) + 2t(xu_{10} + yu_{01})\Big),$$

$$J_{12} = \nabla_2(J_1) = \frac{2}{T}\Big(u_{10}u_{01}(u_{02} - u_{20}) + (u_{10}^2 - u_{01}^2)u_{11} + 2t(yu_{10} - xu_{01})\Big).$$

The last theorem allows us to get PSL_2-classification of smooth functions defined on the unit disk or simply connected domains with smooth boundaries.

References

[1] Н. Г. Коновенко. Дифференциальные инварианты и $\mathfrak{sl}_2$ - геометрии // Київ: "Наукова Думка" НАН України, (2013), 192 с.

[2] B. Kruglikov, V. Lychagin. Global Lie-Tresse theorem // (2013), 48p., http://arxiv.org/pdf/1111.5480.pdf

[3] E. Sharon, D. Mumford. 2D-Shape Analysis Using Conformal Mapping // International Journal of Computer Vision 70(1), p. $55-75$, (2006) // DOI: $10.1007/s11263-006-6121$

Local invariants of smooth foliations

V. M. Kuzakon

(ONAFT, Odesa, Ukraine)

E-mail address: kuzakon_v@ukr.net

A. M. Shelekhov

(Tver State University,Tver , Russia)

E-mail address: amshelekhov@yandex.ru

Let M and X be the smooth manifolds of dimensions n and r, respectively, $n > r$, and $f : M \to X$ be a smooth map (submersion). Following [2], we write the structure equations of the manifold M in the form

$$\begin{aligned} d\omega^i =& \omega^j \wedge \omega^i_j, \\ d\omega^i_j =& \omega^k_j \wedge \omega^i_k + \omega^k \wedge \omega^i_{jk}, \\ d\omega^i_{jk} =& \omega^m_{jk} \wedge \omega^i_m - \omega^i_{mk} \wedge \omega^m_j - \omega^i_{jm} \wedge \omega^m_k + \omega^m \wedge \omega^i_{jkm}, \quad \dots \end{aligned}$$

Here, ω^i, $i, j, k, m, ... = 1, 2, \dots n$, are the basic differential forms of the manifold M, depending on the differentials parameters x^i — local coordinates on M.

It is known [12], that the forms ω^i and ω^i_j form the basis of the bundle $H^1(M)$ first-order coframes of M; the forms $\omega^i, \omega^i_j, \omega^i_{jk}$ form the basis of the bundle $H^2(M)$ of the second order coframes of M, etc.

Similarly, we write the structure equations of the manifold X:

$$\begin{aligned} d\vartheta^a =& \vartheta^b \wedge \vartheta^a_b, \\ d\vartheta^a_b =& \vartheta^c_b \wedge \vartheta^a_c + \vartheta^c \wedge \vartheta^a_{bc}, \\ & \dots \end{aligned}$$

Here ϑ^a, $a, b, c, ... = 1, 2, \dots m$, are the basic differential forms of the manifold X, depending on the on the differentials du^α, where u^a are the local coordinates on X.

Let $f : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{R}$ be a smooth function and $\mathbb{E}^3$ be three-dimensional Euclidean space. Then we obtain the Theorem.

Theorem *Let $f : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{R}$be a submersion, and the space $\mathbb{E}^3$ is related to the orthonormal frame, and sstructure equations of pseudo-group transformations on $\mathbb{R}$ are written in the form*

$$d\vartheta^1 = \vartheta^1 \wedge \vartheta^1_1,\ d\vartheta^1_1 = \vartheta^1 \wedge \vartheta^1_{11},\ d\vartheta^1_{11} = \vartheta^1_1 \wedge \vartheta^1_{11} + \vartheta^1 \wedge \vartheta^1_{111}, \dots$$

. Then pseudo-group of gauge transformations is trivial, and the families of frames on $\mathbb{E}^3$ and on $\mathbb{R}$ can be chosen so that the form ω^3 is the the principal one on $\mathbb{R}$, and there are the frames of the first, second, etc. orders such that the equations

$$\begin{gathered} \vartheta^1 = \omega^3, \\ \vartheta^1_1 = -a_1\omega^1 - a_2\omega^2 + a_3\omega^3, \\ \vartheta^1_{11} = (-b_{11} + 2a_1a_{11} + 2a_2a_{12})\omega^1 + (-b_{22} + 2a_1a_{12} + 2a_2a_{22})\omega^2, \end{gathered}$$

and etc hold, and these equations are completely integrable on the manifold $\mathbb{E}^3 \times \mathbb{R}$.

References

[1] Kuzakon V.M. Differential invariants of foliations. "Reports National Academy of Sciences of Ukraine". 2009, 4, p. 25-27.

[2] Laptev G.F. Fundamental infinitesimal structures of higher orders on a smooth manifold. Geometrical Seminar Proceedings, Vol 1, Moscow, VINITI, 1966, p. 139-189.

Functors of the R-trees category

Olha Lozinska

E-mail address: `olja.lviv133@gmail.com`

The real trees (R-trees) find numerous applications in different parts of mathematics. In particular, Kirk ([1]) established connections between R-trees and the hyperconvex metric spaces introduced by Aronszajn and Panitchpakdi ([2]).

A geodesic segment $[x, y]$ with endpoints x, y in a metric space (X, d) is the image of an isometric embedding $\alpha\colon [0, d(x, y)] \to X$.

We say that a metric space (X, d) is a geodesic space if for every $x, y \in X$ there exists a geodesic joining x and y.

A metric space (X, d) is called an $\mathbb{R}$-tree if

1. (X, d) is a geodesic space;
2. if $[x, y] \cap [x, z] = x$, then $[y, z] = [x, y] \cup [x, z]$;
3. for every $x, y, z \in X$ there exists $w \in X$ such that $[x, y] \cap [x, z] = [x, w]$.

A rooted $\mathbb{R}$-tree consists of an $\mathbb{R}$-tree (X, d) and a point $x_0 \in X$ called the root.

In the sequel, we suppose that (X, d, x_0) is a rooted $\mathbb{R}$-tree. For any $x \in X$, we let $\|x\| = d(x, x_0)$.

For $t \geq 0$, define $X_t = \{x \in X \mid \|x\| = t\}$. Let $\tilde{\exp}X = A \in \exp X | A \subset X_t$ for some $t > 0$.

We prove that the space $\tilde{\exp}X$ is an $\mathbb{R}$-tree.

Let $P(X)$ denote the set of probability measures of compact support on a space X. It is known that the construction of probability measures of compact support determines a functor on the category of Tychonov spaces and continuous maps ([3]). If (X, d) is a metric space, then the set $P(X)$ can be endowed with the Kantorovich metric ([4]); if d is an ultrametric, then the set $P(X)$ can be endowed with an ultrametric d_{HV},

$d_{HV}(\mu, \nu) = \ inf\{r > 0 | \mu(B_r(x)) = \nu(B_r(x)), \text{for every } x \in X\}$.

Let $\tilde{P}(X) = \{\mu \in P(X) \mid \mathrm{supp}(\mu) \in \exp_t(X),$ for some $t \geq 0\}$. Let $\tilde{d}$ be the restriction of d_{HV} onto $\tilde{P}(X)$.

It is also proved that the metric space $(\tilde{P}(X), \tilde{d})$ is an $\mathbb{R}$-tree.

References

[1] W. A. Kirk *Hyperconvexity of R-trees.*,- Fund. Math. 156 (1)(1998), 67-72.

[2] N. Aronszajn and P. Panitchpakdi, *Extensions of uniformly continuous transformations and hyperconvex metric spaces.*,- Pacific J. Math. 6 (1956), 405-439.

[3] A. Ch. Chigogidze *On extension of normal functors.*,- Vestn. MGU. Ser. Matem.-Mekh. 1984. no 6. P. 23-26.

[4] L. V. Kantorovich *On the translocation of masses.*,- Dokl. Akad. Nauk SSSR, V. 37(1942), Nos. 7-8, 227-229.

Fundamental groups of right orbits of smooth functions on surfaces

Sergiy Maksymenko

(Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine)

E-mail address: `maks@imath.kiev.ua`

Let M be a connected orientable surface, P be either the real line of the circle, and $\mathcal{D}_{\mathrm{id}}$ be the group of diffeomorphisms of M isotopic to the identity. This group naturally acts from the right on the space of smooth maps $C^{\infty}(M,P)$ and for each smooth map $f : M \to P$ one can define its stabilizer $\mathcal{S} = \{h \in \mathcal{D}_{\mathrm{id}} \mid f \circ h = f\}$ and orbit $\mathcal{O} = \{f \circ h \mid h \in \mathcal{D}_{\mathrm{id}}\}$ with respect to that action.

Assume that $f : M \to P$ is a Morse map and let Γ be the Kronrod-Reeb graph of f. Then the stabilizer $\mathcal{S}$ naturally acts on Γ. Let also G be the group of all automorphisms of Γ induced by elements from $\mathcal{S}$.

This group is finite and if $M \neq S^2$, then there exists $k \geq 0$ and the following exact sequence

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}^k \longrightarrow \pi_1 O \longrightarrow G \longrightarrow 1.$$

Moreover, it was early shown by the author that $\pi_1 O$ is isomorphic with a subgroup of some braid groups of M, which implies that $\pi_1 O$ has no elements of finite order. Then the above exact sequence implies that $\pi_1 O$ is a Bieberbach group. The aim of the talk is to describe the algebraic structure of $\pi_1 \mathcal{O}$ and G for the cases when M is distinct from the 2-sphere and 2-torus [1, 2, 3].

A similar description of the structure of $\pi_1 \mathcal{O}$ and G for Morse functions on 2-torus was given in [4, 5, 6].

References

[1] S. Maksymenko, *Deformations of functions on surfaces by isotopic to the identity diffeomorphisms*. `arXiv:1311.3347`.

[2] S. Maksymenko, *Structure of the fundamental groups of orbits of smooth functions on surfaces*, `arXiv:1408.2612`.

[3] S. Maksymenko, *Finiteness of homotopy types of right orbits of Morse functions on surfaces*, `arXiv:1409.4319`.

[4] S. Maksymenko, B. Feshchenko, *Smooth functions on 2-torus whose Kronrod-Reeb graph contains a cycle*, Methods Funct. Anal. Topology, **21**, no. 1 (2015), Pp. 22–40.

[5] S. Maksymenko, B. Feshchenko, *Homotopy properties of spaces of smooth functions on 2-torus*, Ukrainian Mathematical Journal, **66**, no. 9 (2014), Pp. 1205–1212.

[6] S. Maksymenko, B. Feshchenko, *Orbits of smooth functions on 2-torus and their homotopy types*, `arXiv:1409.0502`.

A New Curvaturelike Tensor Field in an Almost Contact Riemannian Manifold III

Koji Matsumoto

(Yamagata University, Japan)
E-mail address: `koji_italy,yahoo.co.jp`

In the paper of Prof. M. Prvanović ([7]), we found a curvaturelike tensor field (holomorphic curvature tensor field) in an almost Hermitian manifold.

Using the above tensor field, we defined a new curvaturelike tensor field, named contact holomorphic Riemannian (briefly (CHR)-) curvature tensor field in an almost contact Riemannian manifold ([5]). And we gave some geometrical properties of this tensor field. For example, we showed that a Sasakian (CHR)-space form is a Sasakian space form ([5]).

In this talk, we define another curvaturelike tensor field named $(CHR)_3$-curvature tensor in an almost contact Riemannian manifold which will be more natural and differential geometrical than the last one. Then, we give some geometrical properties of this tensor field. In particular, we consider this tensor field in a Kenmotsu and a Sasakian manifolds.

References

[1] A. Arslan, R. Ezentas, I. Mihai, C. Murathann and C. Žgür, Ricci curvature of submanifolds in Kenmotsu space forms, *JIMMS* **29:12** (2002), 719–726.

[2] A. De, On Kenmotsu manifold, *Bull. of Math. Analysis and Appl*, **2** (2010), 1-6.

[3] D. E. Blair, Contact manifolds in a Riemannian Geometry, Lecture Notes in Math. Springer-verg, Berlin-Heiderberg Newyork, (1976)

[4] K. Kenmotsu, A class of almost contact Riemannian manifolds, *Tohoku Math., J.,* **24** (1972), 93-103.

[5] K. Matsumoto, A new curvaturelike tensor in an almost contact Riemannian manifold, and II, *to appear*

[6] K. Matsumoto and I. Mihai, Ricci tensor of C-totally real submanifolds in Sasakian space forms, *Nihonkai Math. J.*, **13** (2002), 191-198.

[7] M. Prvanović, Conformally invariant tensors of an almost Hermitian manifold associated with the holomorphic curvature tensor, J. Geom. **103**(2012), 89–101

[8] K.Yano, Differential geometry on complex and almost complex spacesΓ́APergamon Press, (1965)

On fractal characteristics and subsidence propetries of loess soil

T. P. Mokritska, A. V. Tushev

(Dnepropetrovsk National University, Dnepropetrovsk, Ukraine)

E-mail address: mokritska@i.ua, tushev@member.ams.org

For the last tens years fractals play very important role in studying of various geological objects and processes [2], [3], [4]. Fractal dimension is the fundamental characteristic of fractals (see [1], for definitions). It is obvious now that pore structures are well treated as fractals and loess soil gives us an example of such a structure. We consider processes of underflooding and subsidence of loess soil. These two processes are deeply related and depend on each other. Loess soil may be considered as a structure which consists of pores and particles. The pore structure has an essential influence on underflooding while the particles structure forms the soil in the process of subsidence.

The pore size distribution function $N_p(L > d_p)$ is defined as the number of pores of size L such that $L > d_p$, where d_p runs positive reals. In the same way we can define the particle size distribution function $N_s(L > d_s)$. These functions for fractal structures obey the following relations

$$N_p(L > d_p) \sim {d_p}^{-D_p}$$

and

$$N_s(L > d_s) \sim {d_s}^{-D_s}$$

where D_p is the fractal dimension of pore size distribution and D_s is the fractal dimension of particle size distribution. We developed a method of calculation of D_p and D_s based on computer analysis of pictures of loess soil.

Evidently, the level of loess soil subsidence L_S strongly depends on the total volume of pores V_{pT} which may by estimated as $V_{pT} = N(\frac{d_{p\max}}{d_{p\min}})^{3-D_p}$,where N is a constant, $d_{p\max}$ and $d_{p\min}$ are the maximal and minimal sizes of pores. Certain approaches for more precise calculations of V_{pT} based on fractal properties of pore structures were considered in [4]. However L_S also depends on the size S_S of the new "skeleton" of the soil which is formed by solid particles after subsidence. In its tern S_S depends on the function $N_s(L > d_s)$ because in the number big particles is essential then they form new "skeleton" with essential pore valume the porosity of "skeleton" is not essential. However, in fact $N_s(L > d_s)$ must obey $N_s(L > d_s) \propto {d_s}^{-D_s}$ and it allows as to obtain some estimations for S_S. So, we may conclude that topological characteristics D_p and D_s may be very helpful in forecasting of loess soil degradation.

References

[1] J. Feder *Fractals.*,- Premium Press, (1988), 260p.

[2] T. P. Mokritska, V. M. Shestopalov, A. V. Tushev *Some facts on relations between stability and fractality of geological structures.*,- Fundamental and Applied Science Problems. Vol 4. - M: RAN, (2012), P. 8-16. (in Russian)

[3] A. R. Russell, O. Buzzi *A fractal basis for soil-water characteristics curves with hydraulic hysteresis.*,- Geotechnique. 62: 3, (2012), P. 269-274.

[4] A. R. Russell *A compression line for soils with evolving particle and pore size distributions due to particle crushing.*,- Geotechnique Letters. 1, (2011), P. 5-9,

The experimental searches for new physics and superstring theory

T.V. Obikhod

(Institute for Nuclear Research NAS of Ukraine, Kiev, Ukraine)

E-mail address: `obikhod@kinr.kiev.ua`

Great discoveries of new physics at very short distances are connected with particle accelerators. Colliding protons on protons at the LHC or electrons on positrons at the ILC in future, we can discover basic particles and fundamental forces in nature. LHC highlighted the problems of new physics, which can be solved with the help of new accelerator, such as ILC, which will be the complementary electron-positron collider for the Large Hadron Collider. Linear collider experiments are able to study simpler, more elementary processes without the complicated "background" present at the LHC and achieve a higher level of precision. There are three main directions of searches for new physics: Higgs physics; supersymmetry and as an addition dark matter candidate; extra dimensions. The properties of Higgs particles and interactions with other elementary particles will be measured. The Higgs is the most sensitive Standard Model particle to new physics, and for this reason an accurate measurement of its couplings provides an excellent way to indirectly discover new phenomena [1]. The resolution of the hierarchy problem of the Standard Model, gauge coupling unification as well as dark matter candidate are predicted by supersymmetry [2]. Searches for supersymmetry are also based on the electroweak pair production of neutralinos and charginos, leading to decay channels with lightest SUSY particles – LSPs, that are the dark matter candidates. Supersymmetry is also motivated by solutions to several theoretical problems and is the most popular candidate for a superstring theory. Superstring theory, that unifies gravity with other forces requires the Universe to have additional dimensions to those of space and time. To see the detailed structure of these extra dimensions [3] and their associated particles are the purposes not only for experimental physics but also to check the predictions of superstring theory. Using AdS/CFT correspondence, which provide to realistically model of real-world systems, it is necessary to note that compactifications of string theory on various Anti-deSitter spacetimes are dual to various conformal field theories. IIB strings are contained in N=4 super-Yang-Mills at the conformal point [4]. But string theory not only contains particle spectrum that may be measured at the experiment but also resolves the cosmological constant problem. Thus, we come to the solving of properties of the vacuum problem, which already manifest itself in the physics of the Higgs boson in consideration of the stability of electroweak vacuum. So we are on the verge of a thin touch of one of the fundamental theories - string theory and experimental discoveries, which will be made in the near future.

References

[1] The CMS Collaboration. Search for the associated production of the Higgs boson with a top-quark pair // e-print arXiv:1408.1682 [hep-ex] (2014).

[2] H.E. Haber. Introductory Low-Energy Supersymmetry// e-print arXiv: hep-ph/9306207, (1993).

[3] Lisa Randall, Raman Sundrum. A Large Mass Hierarchy from a Small Extra Dimension // Phys.Rev.Lett. 83:3370-3373,1999.

[4] Maldacena J. The Large N Limit of Superconformal Field Theories and Supergravity // Adv. Theor. Math. Phys. 2, 1998; 231 [hep-th/9711200].

Kronrod-Reeb graphs of functions on non-compact 2-manifolds

Eugene Polulyakh

(Institute of mathematics of NASU, Kyiv, Ukraine)

E-mail address: polulyah@imath.kiev.ua

We consider continuous functions on two-dimensional manifolds such that:

(f_1) they have discrete sets of local extrema;

(f_2) if a point is not a local extremum, then there exist its neighborhood and a number $n \in \mathbb{N}$, such that function restricted to that neigbourhood is topologically conjugate to $\operatorname{Re} z^n$ in some neigbourhood of zero.

If $n > 1$ or z is a local extremum, we shall call it a *singular point* of such a function.

Given a $f : M^2 \to \mathbb{R}$, let $\Gamma_{K-R}(f)$ be a quotient space of M^2 with respect to its partition which consists of components of level sets of f. It is known that $\Gamma_{K-R}(f)$ is a topological graph when M^2 is compact (see [1, 2]).

We present following conditions that guarantee that the space $\Gamma_{K-R}(f)$ has a simple structure in the case of a non-compact M^2.

(k_1) Components of a level set of f can contain not more than finite number of singular points.

(k_2) Let K be a union of components of level sets of f that contain singular points. For every compact $C \subset M^2$ a set $f(C \cap K)$ is finite.

(k_3) Let $x_1, x_2 \in M^2$ be contained in distinct connected components of a level set $f^{-1}(a)$ for a certain $a \in f(M^2)$. Then there exist open $U_1 \ni x_1$ and $U_2 \ni x_2$, such that for every $b \in f(M^2)$ and a component F_b of $f^{-1}(b)$ the relation holds $(F_b \cap U_1 = \emptyset) \vee (F_b \cap U_2 = \emptyset)$.

A continuous function $f : M^2 \to \mathbb{R}$ is called *K-R–simple* if it complies both with conditions (f_1)-(f_2) and (k_1)-(k_3).

Let G be a locally-finite loop-less topological graph. Let V_0 be a subset of the set of leafs V_l of G. Let $e \subset G$ be a closed edge of G, incident to a leaf from V_0. A set $e \setminus V_0$ is called a *stalk*. A topological space $G_0 = G \setminus V_0$ is named a *topological graph with stalks*.

Theorem 1. *Let a continuous $f : M^2 \to \mathbb{R}$ be K-R–simple.*
Then $\Gamma_{K-R}(f)$ is a topological graph with stalks.

Theorem 2. *Let $f : M^2 \to \mathbb{R}$ be a continuous function. Suppose it complies with* (f_1)-(f_2).
Then conditions (k_2) *and* (k_3) *on f are necessary for $\Gamma_{K-R}(f)$ to be a graph with stalks.*
If $M^2 = \mathbb{R}^2$ then condition (k_1) *is also necessary.*

There is an example of $f : M^2 \to \mathbb{R}$ such that $\Gamma_{K-R}(f)$ ia a graph with stalks but the condition (k_1) is not fulfilled for f.

References

[1] *Кронрод А.С.* О функциях двух переменных // Успехи Мат. Наук – 1950. – **5**, №1 – С. 24-134.

[2] *Reeb G.* Sur les points singuliers d'une forme de Pfaff complètement intégrable ou d'une fonction numérique // Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences. – 1946. – **222**, P. 847-849

Functions with non-generate critical points on the boundary of manifold

O. O. Prishlyak[1], **B. I. Ivanusa**[2]

([1]Taras Shevchenko National University of Kiev, Ukraine,
[2]Taras Shevchenko National University of Kiev, Ukraine)

E-mail address: [1]`prishlyak@yahoo.com`, [2]`bogdana1992ivanusa@mail.ru`

Let M be a n-dimensional manifold with boundary $\partial M = \{x_n = 0\}$ for local coordinates $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x_n \geq 0$, $f : M \to \Re$ — smooth function, such that critical points of f coincide with the critical point of its restriction to the boundary $f|_{\partial M}$ and function f has no more than one critical point on each level.

Theorem 1. Let $p_0 \in \partial M$ be a non-degenerate critical point of function f and non-degenerate critical point of function $f|_{\partial M}$, such that $f(p_0) = 0$. Then we can choose a local coordinate system $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x_n \geq 0$ about p_0 such that p_0 has the coordinates $(0, 0, \ldots, 0)$ and function f can be represented by the following form:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = -x_1^2 - x_2^2 - \ldots - x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 + \ldots + x_{n-1}^2 + \delta x_n^2 \tag{1}$$

for some $\delta \in \{-1, +1\}$.

The pair of numbers (λ, δ), which is defined by equality (1), we call the *index of critical point* $p_0 \in \partial M$ of function f.

Also remark that if $p_0 \in \partial M$ is not critical point of the function f and $f(p_0) = 0$, then there exists a coordinate system $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x_n \geq 0$ about p_0 such that function f can be written in the next form: $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1$.

Corollary. Within conditions of theorem 1 in the case of surface we have the next four representations of function f:

(I) $f(x, y) = x^2 + y^2, y \geq 0$;
(Ii) $f(x, y) = -x^2 + y^2, y \geq 0$;
(Iii) $f(x, y) = x^2 - y^2, y \geq 0$;
(Iv) $f(x, y) = -x^2 - y^2, y \geq 0$.

Unlike the Morse lemma [3] we can't get three local representation of function f, because appropriate coordinate transformation changes the boundary of the surface.

Forth we will consider only the case of 2-dimensional manifold with boundary.

Considering handle decomposition of surface for cases of different indexes of critical points, we get three atoms and consequently six f-atoms, which we will call atom A, atom B and atom C.

Atom [1] A can be determined by equality $x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \leq 0, y \geq 0$, atom B: $x = (R + r\cos u)\cos v, y = r\sin u, z = (R + r\cos u)\sin v, 0 \leq v \leq \pi/2, z \geq -R$ and atom C: $x = (R + r\cos u)\cos v, y = r\sin u, z = (R + r\cos u)\sin v, 0 \leq v \leq \pi/2, z \geq -R, x \geq -R$.

Theorem 2. Each atom coincides with the atom A or atom B, or atom C.

References

[1] А. В. Болсинов, А. Т. Фоменко А.Т. *Интегрируемые гамильтоновые системы. Геометрия, топология, классификация.*,- Ижевськ: Изд.Дом "Удмурський университет", (1999), Т.1, 444 с.

[2] О. О. Пришляк *Функції загального положення на поверхнях з межею.*,- Вісник Київського національного університету. Серія: фіз.-мат.науки, (2008), №20, С.77-79.

[3] Y. Matsumoto *An Introduction to Morse Theory.*,- American Mathematical Society, Providence, Rhode island, (1985), vol.208, 237p.

Quantization of states of the Klein-Gordon-Fock equation and perturbation theory approach to computing spectra of the complex pionic systems

I. N. Serga

(OSENU, Odessa, Ukraine)

E-mail address: nucserga@mail.ru

The aim of the work is carrying out an effective numerical procedure of quantization of stationary and quasi-stationary states for the Klein-Gordon-Fock equation and construction of the perturbation theory formalism for further computing spectra of the complex pionic systems, including calculating radiation characteristics (such as resonance energies and widths, oscillator strengths) and estimating the strong pion -nucleon interaction effects [1]. As the basic theoretical approach we use the relativistic Klein-Gordon-Fock equation one and construct a formalism of the relativistic many-body perturbation theory with direct accounting electromagnetic and strong interaction potentials according to methodise [2].

The general potential includes a bare electric and vacuum-polarization potentials of a nucleus with implementation of the known Gauss model for a nuclear charge distribution plus phenomenological optical model potential to account strong pion-nuclear interaction. The theorem establishing a connection between quality of the relativistic eigen functions basis of the corresponding Klein-Gordon-Fock Hamiltonian of the many-particle pionic system and gauge non-invariant contributions into the radiation width is proven.

As application of a new approach we present the results of computing different n,l-n',l' (n=1-5) state energies, radiation transition probabilities for pionic atoms of caesium, ytterbium, and uranium. The received numerical data are compared with available alternative theoretical and the most accurate empirical data of the Berkley, CERN and Virginia laboratories [3]. The detailed analysis show that there is quite good agreement between empirical data and results of our computing especially for high-lying states. However in a case of low-lying states there are some essential difference between data that can be explained by the known limitation of the used optical potential model of strong interaction.

References

[1] I. N. Serga, Yu. V. Dubrovskaya, A. N. Shakhman et al *Spectroscopy of hadronic atoms: Energy shifts.*,-Journal of Physics: C Ser. (IOP, London, UK). 397: (2012), P.012013 (6p).

[2] A. V. Glushkov *Relativistic Quantum Theory.*,- Odessa, Astroprint, (2008), 700p.

[3] A. Deloff *Fundamentals in Hadronic Atom Theory.*,- Singapore, World Sci., (2003), 352p.

Quantization of quasi-stationary states of Dirac-Kohn-Sham equation with non-singular potential: Advanced algorithm

A. A. Svinarenko

(OSENU, Odessa, Ukraine)

E-mail address: svinarenkoaa@gmail.com

The paper goes on our work on carrying out an effective procedure of quantization of quasi-stationary states of Dirac-Kohn-Sham equation [1] with non-singular potential and developing a new general approach to calculating energy and radiation characteristics of the resonances in spectra of heavy atomic systems, includinbg high-lying states, autoionization, Rydberg resonances. The new approach is based on the QED many-body perturbation theory with Dirac-Kohn-Sham zeroth approximation combined with the generalized relativistic energy approach (Gell-Mann and Low S-matrix formalism) [2] and applied to quantitative studying spectra of superheavy elements, including new elenments with Z-114-118.

As usually, the relativistic wave function zeroth basis is calculated from the Dirac-Kohn-Sham equation with a potential, which includes non-singular electric potential plus exchane-correlation functional [3]). All correlation corrections of the second order and dominated classes of the higher orders diagrams (electrons screening, particle-hole interaction, mass operator iterations, continuum pressure etc) are taken into account. It has been proven a generalized minmax theorem establishing a link between a QED perturbation theory zeroth-approximation orbital basis quality and value of the gauge non-invariant contribution to resonance width. Some applications of new approach are presented [4], in particular, energies for the low-lying, Rydberg and autoionization states in spectra of superheavy elements, including new elenments with Z-114-118, and numerical estimates of the different contributions of the relativistic and exchange-correlation corrections.

References

[1] A. N. Svinarenko *An advanced approach to quantization of quasi-stationary states of Dirac-Kohn-Sham equation.*,-Proceedings of International Geometry Center. 6,N3: (2013), P.67-72.

[2] A. V. Glushkov, O. Yu. Khetselius, A. A. Svinarenko *Frontiers in Quantum Systems in Chem. And Physics.*,- Progress in Theoretical Chemistry and Physics. 18: (2008), P. 505-5703

[3] A. V. Glushkov *Relativistic Quantum Theory.*,- Odessa, Astroprint, (2008), 700p.

[4] A. V. Svinarenko *Study of spectra for lanthanides atoms with relativistic many- body perturbation theory: Rydberg resonances.*,- Journal of Physics: C Series (IOP, London, UK). 548: (2014), P.012039 (6p.).

Quantization of states of the Schrödinger equation with two-center potential and search of spectral elements of a chaos in spectra of some diatomic systems

L. A. Vitavetskaya

(OSENU, Odessa, Ukraine)

E-mail address: nucvita@mail.ru

The main purpose of our work is to carry out new advanced procedure for quantization of states of the nonrelativistic Schrödinger equation with two-center model electric potential directly and effective one-particle correlation potentials of the density-functional theory type [1]– [3]. We present a new effective procedure for quantization of states of the Schrödinger equation with two-center potential and a chaos-geometric approach to search of spectral elements of a chaos in spectra of diatomic systems. The last block includes, in particular, correlation integral analysis, false nearest neighbor algorithm, Lyapunov exponent's analysis, improved surrogate data method version (in versions of [4]).

As usually, the two-center Schrödinger equation zeroth approximation is generated by an effective non-relativistic Hamiltonian of the diatomic systems which includes the nuclear, self-consistent field (the Hellmann potential is used) and one-particle correlation exchange-correlation potentials. The important advancement of our approach is connected with using new effective procedure for quantization of states of the Schrödinger equation with two-center potential and quite simple and accurate accounting for the main exchange-correlation effects.

As example of application of our approach we have carry out the numerical calculation of the energy eigen values spectra and eigen functions basis for some diatomic systems (dimers of alkali elements: sodium and francium) [2]. The main conclusions are in a). there is a physically reasonable agreement between our numerical results and empirical data ground and first excited states energies (potential curves); b) concrete numerical estimates have shown that there is absent a chaotic features in spectra of the lithium dimer, however one could wait for availability of a weak chaos in spectra of the francium dimer. At least, the two first positive numerical values of he Lyapunov's exponents confirm the last preliminary conclusion.

References

[1] A. V. Glushkov *Relativistic and Correlation Effects in Atomic Spectra.*,- Odessa, Astroprint, (2006), 450p.

[2] A. V. Glushkov, L. A. Vitavetskaya et al *Calculation spectroscopic characteristics dihydric van der Waals molecules and ions.*,- Izvestiya VUZ. Ser.Phys. 41: (1998), P. 36-40.

[3] A. V. Glushkov, L. A. Vitavetskaya et al *Quantum theory of cooperative muon-N processes.*,-// Recent Advances in Theor. Phys. and Chem. Systems, Ser. Progress in Theoretical Chem. and Phys. - Berlin, Springer. vol.15, (2006), P. 301-308.

[4] A. Glushkov, A. Svinarenko et al *Chaos-geometric attractor and quantum neural networks approach to simulation chaotic evolutionary dynamics.*,- Adv. in Neural Networks, Fuzzy Systems and Artificial Intelligence, Ser.: Recent Adv. in Computer Engineering,. 21, (2014), P.143-150.

Tiled orders in $M_n(D)$ and Jategaonkar condition

V. M. Zhuravlov, O. A. Shevchenko

(Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine)

E-mail address: `vshur@univ.kiev.ua, shevchenko_o@bigmir.net`

All the necessary information about tiled orders can be found [1].

Let $\Lambda = \{\mathcal{O}, \mathcal{E}(\Lambda) = (\alpha_{i,j})\}$ – consolidated tiled order over discrete valuation ring $\mathcal{O}$ with maximal ideal $\pi\mathcal{O}$, where π – prime element, $\mathcal{E} \in M_n(\mathbb{Z})$, i M – irreducible Λ – grating. In [2] V. A. Jategaonkar gave necessary and sufficient conditions that $\Lambda/\pi\Lambda$-module $M/\pi M$ decomposes into a direct sum of modules. Projective dimension grating M equals to infinity.

If such grating doesn't exists, we will say that the tiled order Λ satisfies Jategaonkar condition.

Irreducible Λ – grating M, so that $\Lambda/\pi\Lambda$- module $M/\pi M$ decomposes into a direct sum of modules, exists if and only if $\Lambda \simeq A = \{\mathcal{O}, \mathcal{A} = (a_{i,j})\}$, where $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A_1 & A_{12} \\ A_{21} & A_2 \end{pmatrix}$, $\mathcal{A} \geq 0$, $A_{21} \geq 2U$,
$U = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$.

Lets suppose that $G = G(\Lambda)$ is a simple graph, which is constructed on the tiled orders $\Lambda \subset M_n(D)$ as follows: set of vertices is $VG = \{1, 2, ..., n\}$. Points i and j are connected by an edge if and only if $\alpha_{ij} + \alpha_{ji} = 1$.

If graph $G = G(\Lambda)$ is connected, then Λ satisfies Jategaonkar condition.

Theorem 1. Let Λ – consolidated tiled order in $M_n(D)$, where $n \in \{4, 5\}$,
$\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{22} \end{pmatrix}$–bilateral Peirce decomposition order Λ and
$G(\Lambda) = G(\Lambda_{11}) \bigcup G(\Lambda_{22})$. Let $Q(\Lambda)$ – directed graph tiled order Λ. Then Λ satisfies Jategaonkar condition if and only if a cycle exists $i_1 \to j_1 \to i_2 \to j_2 \to i_1$ in directed graph $Q(\Lambda)$ with $\alpha_{i_1 j_1} + \alpha_{j_1 i_2} + \alpha_{i_2 j_2} + \alpha_{j_2 j_1} < 4$, where $i_1, i_2 \in VG(\Lambda_{11}), j_1, j_2 \in VG(\Lambda_{22})$

Theorem 2. Let Λ – consolidated tiled order in $M_n(D)$, where $n \leq 5$, which satisfies Jategaonkar condition. Than $\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} \leq \frac{(n-1)n(n+1)}{6}$.

The author sare sincerely grateful to research advisor Pryshlyak O.O., professor at the geometry department Faculty of Mechanics and Mathematics Taras Shevchenko National University of Kyiv for setting a problem and valuable pieces of advice.

References

[1] M.Hazewinkel, N.Gubareni and V.V.Kirichenko, *Algebras, Rings and Modules.* Vol. 1, Series: Mathematics and Its Applications, **575**, Kluwer Acad. Publish., 2004. xii+380pp.

[2] V. A. Jategaonkar, Global dimension of tiled order over a discrete valuation rings, *Trans. Amer. Math. Soc.*, Vol. 196, 1974. pp. 313-330.

The problem of the function extension on the circle to m - functions on The Klein bottle with a hole

N. V. Zubaruk, Y. I. Povydalo

(Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine)
(Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine)

E-mail address: zubaruknatashka@mail.ru, povydalo@gmail.com

A compact orientable manifold (surface) M with a boundary ∂M will be considered. The function $f : M \to \mathbb{R}$ is called *m-function* if: a) all its critical points are nondegenerate and do not lie on the boundary ∂M; ; b) edge of manifold can be represented as the union of $\partial M = \partial M_{-} \cup \partial M_0 \cup \partial M_{+}$ that the restriction of f_∂ function f to ∂M_0 is a Morse function and if the set of $\partial M_{-} \neq \varnothing (\partial M_{+} \neq \varnothing)$, then the function f takes its minimum (maximum) value [1].

Generalized snake is called a sequence of positive numbers x_i, which satisfy the conditions $x_0 \neq x_1 \neq ... \neq x_n, 0 \leq x_i \leq m, n, m \in \mathbb{N}$ [2].

In the case of the four critical points, there are two snakes, one feature implemented on leaves Mobius.

Consider the $m-$function which has 6 critical points. Number of Morse functions on the circle with 6 critical points equals to the number of appropriate substitutions, namely 16. The functions on the circle are defined by snakes.

Theorem. *For each snake which is defined the Morse function on the circle with six critical points there is a one up to the topological equivalence, m-function on the Klein bottle with a hole without internal critical points the restriction of which is topologically equivalent to the given Morse function.*

The author sare sincerely grateful to research advisor Pryshlyak O.O., professor at the geometry department Faculty of Mechanics and Mathematics Taras Shevchenko National University of Kyiv for setting a problem and valuable pieces of advice.

References

[1] Пришляк О.О., Пришляк К.О., Міщенко К.І., Лукова-Чуйко Н.В. *Класифікація простих m-функцій на орієнтованих поверхнях.* - Журнал обчислювальної та прикладної математики. Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 2011, №1(104), с. 98-101

[2] V. I. Arnol'd *The calculus of snakes and the combinatorics of Bernoulli, Euler and Springer numbers of Coxeter groups.* - Uspekhi Mat. Nauk, 1992, 47:1(283), 3–45

Контактная форма Ли и конциркулярная геометрия локально конформно квази-сасакиевых многообразий

О. Е. Арсеньева

(МПГУ, Москва, Россия)

E-mail address: highgeom@yandex.ru

На сегодняшний день ведутся активные исследования геометрии почти контактных метрических структур на многообразиях. Одним из наиболее актуальных вопросов этого раздела геометрии является вопрос о преобразованиях того или иного вида этих структур. Особый интерес представляют конформные преобразования и их частный случай — конциркулярные преобразования. Критерий, позволяющий выделить конциркулярные преобразования из класса конформных преобразований римановых структур был получен японским геометром Кентаро Яно. С другой стороны, одним из наиболее интересных классов почти контактных метрических структур являются так называемые квази-сасакиевы структуры, введенные в рассмотрение Дэвидом Блэром. Их значение определяется, прежде всего, тем, что они, в определенной степени, являются контактным аналогом келеровых структур, играющих огромную роль в современной геометрии и ее приложениях. Наличие конформных и конциркулярных преобразований позволяет ввести в рассмотрение в контактной геометрии классы почти контактных метрических структур, которые допускают локально конформное или локально конциркулярное преобразование в квази-сасакиеву структуру: локально конформно квази-сасакиевы и локально конциркулярно квази-сасакиевы структуры соответственно. В настоящей работе получен критерий, позволяющий выделить подкласс локально конциркулярно квази-сасакиевых структур из класса локально конформно квази-сасакиевых структур, интенсивно изучаемых в последнее время. Получены некоторые приложения и обобщения этого результата.

Пусть M^{2n+1} — гладкое нечетномерное многообразие, снабженное почти контактной метрической структурой (короче, $\mathcal{AC}$-структурой). Нами доказана следующая

Теорема. *$\mathcal{AC}$-структура допускает локально конциркулярное преобразование в частично квази-сасакиеву структуру тогда и только тогда, когда ее контактная форма Ли удовлетворяет уравнению Яно*

$$\nabla\omega = \omega \otimes \omega + \rho g,$$

где ω – контактная форма, ρ – гладкая функция, g – метрический тензор.

Об А-деформациях в классе минимальных поверхностей

Л. Л. Безкоровайная

(ОНУ им. И. И. Мечникова, Одесса, Украина)

E-mail address: liliyabezk@gmail.com

Т. Ю. Подоусова

(ОГАСА, Одесса, Украина)

E-mail address: tatyana_top@mail.ru

Доказана

Теорема 1. Для того, чтобы при ареальной бесконечно малой деформации минимальной поверхности $S \subset E_3$ сохранялась средняя кривизна, необходимо и достаточно, чтобы компоненты поля смещения $\overline{U} = U^{\alpha}\overline{r_{\alpha}} + \overset{\circ}{U}\overline{n}$ удовлетворяли следующей системе уравнений

$$U^{\alpha}{}_{,\alpha} = 0, \qquad (1)$$

$$g^{ij}\overset{\circ}{U}_{,ij} - 2K\overset{\circ}{U} = 0, \qquad (2)$$

где g^{ij}–метрический тензор, а $K \neq 0$– гауссова кривизна поверхности.

Уравнение (1) содержит одно дифференциальное уравнение с частными производными первого порядка относительно двух неизвестных функций u^1, u^2. В работе общее решение уравнения (1) представлено через произвольный градиентный вектор $\psi_{\alpha} \in C^1$ в виде $u^i = c^{i\alpha}\psi_{\alpha}$, $i = 1, 2, c^{i\alpha}$– дискриминантный тензор.

Уравнение (2) представляет собой одно дифференциальное уравнение с частными производными второго порядка эллиптического типа относительно функции $\overset{\circ}{U}$. Т. к. гауссова кривизна минимальной поверхности всегда отрицательна, то убеждаемся, что последний коэффициент $(-2K) > 0$. Для такого уравнения применение теории известных краевых задач проблематично. С другой стороны, имеет место следующая

Теорема 2. Для каждой минимальной поверхности $(K \neq 0)$ можно выбрать постоянный вектор $\overline{c}$ так, что найдется область переменных x^1, x^2, в которой для единичного вектора нормали поверхности выполняется условие $\overline{c} \cdot \overline{n} > 0$ (или $\overline{c} \cdot \overline{n} < 0$) и в которой уравнение (2) имеет ненулевое решение $\overset{\circ}{U} = \overline{c} \cdot \overline{n}$.

При условиях теоремы 2, как известно [1], к уравнению (2) можно применять теоремы существования и единственности решений краевых задач. В результате, получены некоторые результаты для поверхности с границей.

Список литературы

[1] И. Н. Векуа *Новые методы решения эллиптических уравнений.*, - М.-Л.: Гостехиздат.- 1948.

О частном случае почти геодезических отображений типа π_1

В. Е. Березовский, Й. Микеш

(Уманский национальный университет садоводства, Украина)

E-mail address: `berez.volod@rambler.ru`

(Palacky University, Olomouc, Czech Republic)

E-mail address: `josef.mikes@upol.cz`

Рассматриваются канонические почти геодезические отображения первого типа пространств аффинной связности $A_n \to \bar{A}_n$, характеризующиеся следующими уравнениями (см. [1,2,3]):

$$P^h_{ij,k} + P^h_{ik,j} = -P^\alpha_{ij}P^h_{k\alpha} - P^\alpha_{ik}P^h_{j\alpha} + \delta^h_k a_{ij} + \delta^h_j a_{ik}, \tag{1}$$

где a_{ij} – некоторый симметрический тензор, запятой обозначается ковариантная производная в пространстве аффинной связности A_n.

Уравнения (1) сведены к замкнутой системе типа Коши в ковариантных производных относительно функций $P^h_{ij}(x)$, $a_{ij}(x)$. Установлено, что количество существенных параметров, от которых зависит общее решение такой системы, не превышает числа $1/2\ n(n+1)^2$.

Имеют место

Теорема 1. *Тензоры*

$$\overset{*}{W}{}^h_{ijk} = R^h_{ijk} - \frac{1}{n-1}\ (R_{ij}\delta^h_k - R_{ik}\delta^h_j),$$

$$W_{ij} = R_{ij} - R_{ji},$$

а также тензор проективной кривизны Вейля являются инвариантными геометрическими объектами относительно почти геодезических отображений первого типа, определяемых уравнениями (1).

Теорема 2. *Если проективно-евклидово или эквиаффинное пространство A_n допускает почти геодезическое отображение, характеризующееся уравнениями (1), на $\bar{A}_n$, то $\bar{A}_n$ является проективно-евклидовым или эквиаффинным пространством соответственно.*

Таким образом, проективно-евклидовы и эквиаффинные пространства образуют замкнутые классы относительно почти геодезических отображений, определяемых уравнениями (1).

В случае, когда тензор $a_{ij}(x)$ тождественно обращается в нуль, уравнения (1) вполне интегрируемы.

Список литературы

[1] Н. С. Синюков *Геодезические оторажения римановых пространств.* – Наука, М. (2008), 256с.

[2] V. Berezovski, J. Mikeš *On special almost geodesic mappings of type π_1 of spaces with affine connection.* – Acta Univ. Palacki. Olomouc, Fac. Rerum Nat., Math. (2004), 21-26.

[3] V. E. Berezovski, J. Mikeš, A. Vanžurová, *Fundamental PDE's of the canonical almost geodesic mappings of type π_1*, Bull. Malays. Math. Sci. Soc. (2) 37, No. 3, 647-659 (2014).

Об определении изотопных функций

О. П. Бондарь

(КЛА НАУ, Кировоград, Украина)

E-mail address: bondarkla@ukr.net

В.В.Шарко [1] дал необходимое и достаточное условие изотопности для правильных минимальных функций Морса на односвязном многообразии размерности, большей пяти. Он называл функции Морса f_0 и f_1 на многообразии M^n изотопными, если существует путь $\gamma : [0,1] \longrightarrow C^\infty(M^n, R)$, такой, что $\gamma(0) = f_0, \gamma(1) = f_1$ и $\gamma(t)$ - функция Морса для всех $t \in [0,1]$. При этом функции Морса f и g, заданные на многообразии M^n, названы сопряженными, если существуют диффеоморфизмы $h : M^n \to M^n$ и $k : [0,1] \to [0,1]$, изотопные тождественным, такие, что $f = k \circ g \circ h$. Если h и k - гомеоморфизмы, то функции (не обязательно Морса) f и g называют (см., напр., [2]) топологически сопряженными, если они топологически эквивалентны [3] и гомеоморфизм k сохраняет ориентацию.

Поскольку сопряженная функция - понятие теории функций, являющееся конкретным отражением некоторого инволютивного оператора для соответствующего класса функций, то сопряженные в указанном выше смысле функции естественно рассмотреть, как частный случай функций, изотопных в более широком смысле.

Определим изотопные функции следующим образом. Пусть M - n-мерное многообразие и X - его подмножество. Следуя определениям [4], обозначаем через $Iso(M,X)$ группу его изомофизмов (C^r-диффеоморфизмов, $r = 1,\ldots,\infty$ или гомеоморфизмов или PL-гомеоморфизмов), неподвижных на X. $Iso(M,\oslash) = Iso(M)$. Если M ориентируемо, то $Iso^+(M)$ обозначает группу изоморфизмов, сохраняющих ориентацию M. $Iso_0(M,X)$ - подгруппа в $Iso(M,X)$, состоящая из всех изоморфизмов, изотопных idM в пространстве $Iso(M,X)$.

Функции f_0 и f_1 на многообразии назовем изотопными (C^r-изотопными или непрерывно изотопными или изотопными функциями Морса), если существуют такая неподвижная на X изотопия $H : (M,X) \times I \to (M,X) \times I$ и изотопия $h : [0,1] \times I \to [0,1] \times I, H_t \in Iso_0(M,X)$ и $h_t \in Iso_0^+([0,1])$, что для всех $t \in [0,1]$ $h_t \circ f_0 = f_t \circ H_t$ или $f_t = h_t \circ f_0 \circ H_t^{-1}$ - функции одинакового вида (C^r-гладкие или непрерывные или функции Морса).

Список литературы

[1] В. В. Шарко *Функции на многообразиях (алгебраические и топологические аспекты).*,- Киев: Наук. думка, (1990), 296с.

[2] A. O. Prishljak *Topological equivalence of smooth functions with isolated critical points on a closed surface.*,-http: //arxiv.org/pdf/math/9912004.

[3] В. М. Алексеев, В. М. Тихомиров, С. В. Фомин *Оптимальное управление.*,- М, (1979), 200с.

[4] И. Ю. Власенко, С. И. Максименко, Е. А. Полулях *Топологические методы в изучении групп преобразований многообразий.*,- Тр. Ин-та математики НАН Украины, (2006), 30-80с.

Нейтральная энтропия внутреннего отображения

И. Ю. Власенко

(Институт Математики, Киев, Украина)

E-mail address: vlasenko@imath.kiev.ua

В теории динамических систем, энтропия динамической системы — число, выражающее степень хаотичности её траекторий. Различают метрическую энтропию, описывающую хаотичность динамики в системе с инвариантной мерой для случайного выбора начального условия по этой мере, и топологическую энтропию, описывающую хаотичность динамики без предположения о законе выбора начальной точки.

При этом, вариационный принцип утверждает, что для непрерывной динамической системы на компактном множестве, топологическая энтропия равна супремуму метрических, взятому по всем возможным выборам инвариантных мер данной системы.

В работах [2, 3] был введен ряд новых инвариантов топологической сопряженности внутренних (т.е. открытых дискретных) отображений, в качестве модели для которых использовались динамические инвариантные множества гомеоморфизмов, которые основаны на аналогии между траекториями для обратимых отображений и направлениями в множестве точек, имеющих общий образ, которое рассматривались как траектория в двух измерениях. В направлении итераций — "время", а трансверсальное ему — "нейтральное" измерение.

Распространяя эту аналогию на энтропию, мы можем рассматривать обычную энтропию как связанную с направлением "времени" и ввести еще одну энтропию, "нейтральную" энтропию, которую можно рассматривать как число, выражающее степень хаотичности расположения различных прообразов необратимого отображения друг относительно друга, и связанную с последовательностью локально тождественных отображений $f^{-n} \circ f^n$.

"Нейтральная" энтропия по определению равна нулю для обратимых отображений. Можно определить как метрическую, так и топологическую нейтральную энтропию. Вычислены примеры, для которых нейтральная энтропия не равна нулю.

Строгое определение нейтральной энтропии использует тот факт, что для накрытия f для каждого $n \geq 1$ ветви многозначного отображения $f^{-n} \circ f^n$ можно отождествить с отдельными автоморфизмами группы автоморфизмов A_{f^n} накрытия f^n. Тогда с накрытием f связана последовательность свободно действующих дискретных групп

$$A_f \subset A_{f^2} \subset \cdots \subset A_{f^n} \subset \ldots,$$

и нейтральную энтропию можно рассматривать как sofic entropy ([4]) такого действия. Эта конструкция распространяется и на более общие внутренние отображения, где действие уже не свободно на множестве точек ветвления.

Список литературы

[1] Ю. Ю. Трохимчук *Дифференцирование, внутренние отображения и критерии аналитичности.*,- Институт математики НАН Украины. Киев. – 2008.

[2] И. Ю. Власенко *Динамика внутренних отображений.*,- Нелінійні Коливання. 2011. Т.14 № 2. –С. 181–186.

[3] И. Ю. Власенко *Внутренние отображения: топологические инварианты и их приложения*, - Институт математики НАН Украины. Киев. – 2014.

[4] D. S. Ornstein and B. Weiss. *Entropy and isomorphism theorems for actions of amenable groups.* J. Analyse Math. 48 (1987), 1-141.

Неустойчивость пламени и геометрия газового факела

В. Э. Волков

(ОНАПТ, Одесса, Украина)

E-mail address: `viktor@te.net.ua`

Газовые факелы подразделяются на ламинарные и турбулентные. Модель ламинарного факела пред-полагает наличие «холодного конуса», ограниченного фронтом пламени, при этом фронт пламени может рассматриваться как зона конечной протяженности. Принципиальное отличие турбулентного факела от ламинарного состоит в том, что из-за наличия в аэродинамической структуре потока турбулентных вихрей и пульсаций фронт пламени перестает иметь четкие границы. Понятие «скорость распространения фронта турбулентного пламени» практически теряет смысл. Геометрия и размеры турбулентного факела в сравнении с факелом ламинарным определяются совершенно иначе.

Проблему турбулизации газового факела связывают главным образом с вопросом о том, ламинарной или турбулентной является струя горючей смеси в горелке. Однако подобный подход является весьма упрощенным. Общеизвестно, что переход к турбулентности в струе горючей смеси обусловлен развитием неустойчивости ламинарного течения вязкой среды (если моделировать подачу горючего как течение в канале или трубе). Однако, устойчивость такого течения обеспечивает только ламинарность потока горючей смеси, но не гарантирует ламинарность самого факела, так как факельное пламя само по себе может быть неустойчивым, что приводит к автотурбулизации горения.

Детально исследована неустойчивость и структура пламени (в том числе факельного). Доказано, что возможность развития неустойчивости и перехода процесса факельного горения к турбулентности определяется соотношением между длиной волны λ_m максимально быстро нарастающего со временем возмущения, алгоритм определения которой приведен в работах и длиной Λ образующей конуса пламени. Возможны три принципиально различные ситуации.

Если

$$\lambda_m > \Lambda, \tag{1}$$

то неустойчивость не имеет места (возмущения с неустойчивыми длинами волн не могут реализоваться из-за ограниченности длины фронта пламени) и автотурбулизация горения не происходит.

Если

$$\lambda_m \approx \Lambda, \tag{2}$$

то неустойчивость, скорее всего, проявляется не в автотурбулизации пламени, а в искажении геометрической формы его фронта. Фронт пламени в плоском сечении принимает дугообразные формы, – при этом геометрические параметры дуг определяются длиной волны λ_m, – однако само пламя остается ламинарным. «Холодный конус» в этом случае принимает тюльпановидную форму.

И, наконец, если

$$\lambda_m < \Lambda, \tag{3}$$

то пламя неустойчиво и факел становится турбулентным.

Отметим, что (максимальный) поперечный размер турбулентного факела определяется, в первую оче-редь, масштабом турбулентности, т.е. параметром, который напрямую зависит от λ_m.

Решение задачи о геометрической форме и размерах газового факела позволяет более эффективно управлять процессом сжигания топлива (особенно – переменного состава) в топках и камерах сгорания.

Ещё раз о геометрических методах в теоретической физике

А. Н. Герега

(ОНАПТ, Одесса, Украина)

E-mail address: `a.herega@gmail.com`

В математический аппарат теоретической физики в двадцатом столетии вошел ряд универсальных и специальных размерностей. Существуют две основные группы задач, в которых размерности стали реальным инструментом получения и анализа решений. Первая – это задачи стохастической динамики, в частности, проблемы турбулентности. В этих задачах размерности являются доступными для измерения и структурно устойчивыми характеристиками системы, связанными, в частности, с показателями Ляпунова; а также позволяют провести классификацию странных аттракторов и связанного с ними хаотического поведения. Вторая группа – задачи перколяционной теории: раздела статистической физики, в котором на протяжении полувека исследуются геометрические фазовые переходы.

Для критических показателей физических величин, как правило, можно указать множество, с размерностью которого этот показатель связан. В свою очередь, исследование структуры таких множеств много даёт для понимания критического поведения системы и соотношений между показателями, позволяет проследить связь между поведением системы в промежуточной асимптотике и её геометрией.

В обзоре проанализировано понятие адекватности меры точечных множеств, базирующееся на размерности Хаусдорфа-Безиковича, и ее роль в определении фрактальной размерности, введенной в рассмотрение Б. Мандельбротом. Фрактальная размерность и ее возможные варианты рассматриваются как метрические понятия, которые определяются алгоритмами покрытия множества d-мерными шарами. Рассмотрены способы покрытия ограниченных множеств, предложенные Г. Кантором и Г. Минковским, обобщение Ж. Булиганом размерности Минковского на случай дробных размерностей, а также наиболее экономичное покрытие, приводящее к размерности Понтрягина-Шнирельмана.

Обсуждаются вопросы возможности использования одних размерностей для оценки других. Показано, что для самоподобных математических фракталов (типа канторовой пыли, ковра Серпинского и других) массовая размерность совпадает с размерностью Хаусдорфа-Безиковича, т.к. определяется размерностью подобия скейлингового закона. Кроме того, для гладких кривых и поверхностей величина размерностей Минковского-Булигана D_{MB} и Хаусдорфа-Безиковича D_H совпадает, и с учётом того, что D_{MB} легче подаётся оценке, она может использоваться для определения величины D_H, по аналогии с тем, как ёмкость по Колмогорову используется для оценки размерности Хаусдорфа-Безиковича.

В докладе рассмотрены также обобщённые размерности Реньи, в частности, информационная и корреляционная, размерность энтропии меры, массовая размерность, внешняя и внутренняя размерности кривой, эффективная размерность и другие.

Список литературы

[1] J. A. Schouten. Tensor analysis for physicists // Oxford, (1951).

[2] I. M. Sokolov. Dimensionalities and other geometric critical exponents in percolation theory // Sov. Phys. Usp. 29, (1986), p.924-945.

[3] L. Pontrjagin, L. Schnirelman. Sur une propriete metrique de la dimension // Ann. Math. 33, (1932), p.156-162 .

[4] A. Renyi. Probability theory // Amsterdam, (1970).

Геометрический метод сравнительного анализа энергетических негармонических детерминированных процессов и его применение в радиотехнике

М. Н. Горбачев

(Институт общей энергетики, Киев, Украина)

E-mail address: khimjuk@ied.org.ua

Задачи сравнительного анализа энергетических негармонических детерминированных процессов в радиотехнических цепях и устройствах имеют проблемный характер и являются весьма актуальными. Это объясняется следующими причинами:

1) все более широким применением ключевых режимов работы в современной радиотехнике, в результате чего энергетические периодические процессы являются существенно негармоническими (например, в усилителях класса Д);

2) неэффективностью традиционно применяемых одномерных математических моделей в виде составляющих полной мощности S (активной P, реактивной Q и мощности искажения T) для сравнительного анализа ключевых режимов, который необходим на этапе проектирования и разработки радиотехнических устройств с переменными параметрами.

Указанные причины явились обоснованием для разработки геометрического метода сравнительного анализа периодических энергетических негармонических (ПЭН) процессов в радиотехнических цепях и устройствах. Разработанный новый геометрический метод основан на нахождении и применении трехмерных геометрических моделей ПЭН процессов в виде режимных траекторий совместно с предложенным критерием K_σ для оценки эффективности ПЭН процессов как физически единого целого:

$$K_\sigma = \frac{x_{\max}(q) - x_{\min}(q)}{1 + z_\sigma(q)},$$

где $x_{\max}(q)$и $x_{\min}(q)$ - значения нормированных по модулю вектора полной мощности S координат, соответствующих началу и концу режимной траектории (РТ), которая расположена на сферической оболочке радиуса $\rho = 1$; $z_\sigma(q)$ - среднее значение нормированной координаты $z(q)$на заданном диапазоне изменения переменного параметра, например, добротности q.

При этом числитель в формуле для расчета критерия K_σ пропорционален длине РТ в заданном диапазоне изменения переменного параметра q, а координата $z_\sigma(q)$ определяет пространственную ориентацию режимной траектории в трехмерном эвклидовом пространстве.

В докладе приведен пример решения задачи сравнительного анализа ПЭН процессов в радиотехнической линейной цепи типа RL с переменной добротностью q в диапазоне от $q_{\min} = 1$ до $q_{\max} = 40$ при воздействии двух различных негармонических детерминированных испытательных сигналов, широко применяемых в радиотехнике и электросвязи. Первый из этих сигналов является разнополярным напряжением симметричной прямоугольной формы с широтно-импульсной модуляцией. Второй сигнал имеет форму меандра. Первому сигналу при угле модуляции $\alpha = \pi/3$ соответствует значение критерия $K_\sigma = 0,3392$, второму сигналу соответствует значение критерия $K_\sigma = 0,4612$. При этом большим значениям критерия K_σ соответствуют более эффективные ПЭН процессы.

В рассмотренной задаче, имеющей большое прикладное значение, более эффективным является ПЭН процесс, соответствующий сигналу типа меандр.

Индикатриса нормальной кривизны евклидовой поверхности псевдоевклидова пространства

М. А. Гречнева, П. Г. Стеганцева

(ЗНУ, Запорожье, Украина)

E-mail address: mag83@list.ru,steg_pol@mail.ru

Пусть $V^2(u^1, u^2)$ - еклидова поверхность в псевдоевклидовом пространстве ${}^1R_4$ (с метрикой сигнатуры $- + ++$). В каждой точке M поверхности V^2 определены две нормали: псевдоевклидова с направляющим вектором $\bar{n_1}$ и евклидова с направляющим вектором $\bar{n_2}$. Каждому направлению $\bar{\tau}(du^1, du^2)$ в касательной плоскости $T_M V^2$ соответствует вектор нормальной кривизны $k(\bar{\tau})$, расположенный в нормальной плоскости N_M. При вращении направления $\bar{\tau}$ в касательной плоскости $T_M V^2$ конец вектора $k(\bar{\tau})$ опишет некоторую кривую, которую, по аналогии с евклидовым пространством, будем называть индикатрисой нормальной кривизны ([1]). В отличие от евклидова пространства, в пространстве ${}^1R_4$ вектор нормальной кривизны имеет вид

$$k(\bar{\tau}) = \frac{(\bar{r_{ss}}, \bar{n}_1)}{|\bar{n_1}|}\bar{n_1} + \frac{(\bar{r_{ss}}, \bar{n}_2)}{|\bar{n_2}|}\bar{n_2} = -i(\bar{r_{ss}}, \bar{n}_1)\bar{n_1} + (\bar{r_{ss}}, \bar{n}_2)\bar{n_2} = -i\frac{II^1}{ds^2}\bar{n_1} + \frac{II^2}{ds^2}\bar{n_2},$$

где $\bar{r_{ss}}$ - вектор кривизны кривой на поверхности V^2, имеющей направление $\bar{\tau}$ в точке M, II^k - вторая квадратичная форма, соответствующая нормали $\bar{n_k}$, $k = 1, 2$.

Для нахождения координат x^1, x^2 точки индикатрисы выберем в плоскости N_M репер с началом в точке M, базисными ортами $\bar{n_1}$, $\bar{n_2}$ и перейдем к новой параметризации поверхности так, чтобы для ее метрического тензора выполнялось условие $g_{ij} = \delta_{ij}$. Тогда

$$x^1 = -i\left(\frac{L^1_{11} + L^1_{22}}{2} + \frac{L^1_{11} - L^1_{22}}{2}\cos 2\varphi + L^1_{12}\sin 2\varphi\right),$$

$$x^2 = \frac{L^2_{11} + L^2_{22}}{2} + \frac{L^2_{11} - L^2_{22}}{2}\cos 2\varphi + L^2_{12}\sin 2\varphi,$$

где угол φ образован направлением $\bar{\tau}$ и координатной линией u^1.

Можно показать, что эти уравнения являются уравнениями центральной кривой второго порядка и привести их к каноническому виду. Ряд свойств поверхности определяются свойствами ее индикатрисы нормальной кривизны. В частности, гауссова кривизна евклидовой поверхности V^2 выражается через координаты α, β центра индикатрисы и ее полуоси a, b в виде

$$K = \alpha^2 + \beta^2 - a^2 - b^2.$$

Список литературы

[1] Ю. А. Аминов *Геометрия подмногообразий* .- К.:Наукова думка, (2002), 467с.

Об одном классе эластичных тканей ранга ρ

К. Р. Джукашев

(ТвГУ, Тверь, Россия)

E-mail address: dzhukashev@gmail.com

В работе [1] была проведена классификация всех эластичных три-тканей с тензором кручения ранга 1 (т.е. ранг производной алгебры, образуемой тензором кручения равен единице). Было доказано, что такие ткани образуют два класса, E_1^r и E_2^r.

В данной работе приведено частичное классифицирование эластичных тканей ранга 2, найден один из классов таких тканей, а также проведенно обобщение классов тканей ранга 1 E_2^r и тканей ранга 2 $E_2^r(2)$ до класса тканей ранга ρ - класса $E_2^r(\rho)$. Основным результатом работы является

Теорема 1. *Ткани $E_2^r(\rho)$, заданные уравнениями*

$$\begin{aligned} z^u &= x^u + y^u + \frac{1}{3}b^u_{abc}(x^a - y^a)y^b x^c + c^u_{ab}x^a y^b, \\ z^a &= x^a + y^a, \end{aligned} \tag{1}$$

где $b^u_{abc} = -b^u_{acb} = const$, $c^u_{ab} = -c^u_{ba} = const$, $u = 1, ..., \rho$; $a, b, c = \rho + 1, ..., r$, являются r-мерными эластичными тканями и ранг ее производной алгебры, определяемой тензором кручения, равен ρ.

Список литературы

[1] Джукашев К.Р., Шелехов А.М. *Многомерные гладкие лупы с универсальным свойством эластичности* - Математический сборник, 2015, том 206:5 (в печати)

Аналитическая аппроксимация геометрической формы эритроцита

В. В. Зуб

В. Х. Кириллов

В. М. Кузаконь

(ОНАПТ, Одесса, Украина)

E-mail address: kuzakon_v@ukr.net

Нормальный эритроцит(нормоцит) человеческой крови имеет форму двояковогнутой лепешки с утолщенным торовидным краем. В работе [3] рассматривается геометрия модели эритроцита, заданной в цилиндрических координатах последовательно соединенными кривыми Безье. Однако, такой подход, как любая сплайн-интерполяция, значительно усложняет расчеты, которые применяются в современной патофизиологии крови. Авторы предлагают аппроксимировать профиль нормоцита в виде линии из семейства кривых Персея. Эти кривые представляют собой линии пересечения поверхностью эллиптического тора

$$y^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2}\left(\sqrt{x^2+z^2} - d\right)^2$$

с плоскостью, параллельной его оси $z = p$, причем, геометрический смысл параметров следующий: a, b – полуоси эллипса; d – расстояние от начала координат до центра эллипса; p – расстояние от оси тора до секущей плоскости.

Таким образом, профиль эритроцита в первом квадранте координатной плоскости xOy определяется уравнением

$$y = c\sqrt{a^2 - \left(\sqrt{x^2+p^2} - d\right)^2} \qquad \left(c = \frac{b}{a}\right)$$

Если уравнение профиля эритроцита представить в параметрической форме

$$\begin{cases} x(t) = \sqrt{\left(d + a\cos t\right)^2 - p^2}; \\ y(t) = b\sin t, \end{cases}$$

площадь поверхности эритроцита можно найти, вычислив интеграл:

$$S = 4\pi\int\limits_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\left(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t\right)\left(d + a\cos t\right)^2 - b^2p^2\cos^2 t}\,dt,$$

где $\alpha = 0$, $\beta = \pi - \arccos\frac{d-p}{a}$. Объем эритроцита находим как:

$$V = 2\pi\int\limits_{0}^{b}\left(\left(d + \sqrt{a^2 - \frac{y^2}{c^2}}\right)^2 - p^2\right)dy - 2\pi\int\limits_{y_0}^{b}\left(\left(d - \sqrt{a^2 - \frac{y^2}{c^2}}\right)^2 - p^2\right)dy,$$

где $y_0 = c\sqrt{a^2 - (d-p)^2}$.

Список литературы

[1] Чижевский А. Л. *Структурный анализ движущейся крови.* – М.: Изд-во АН СССР, 1959.

[2] Власов В. Н.*Вычисление некоторых показателей эритроцитов человека*.- М, Эл № 77-6567, публ.14137, 12.01.2007.

[3] Нагорнов Ю. С., Жиляев И. В. *Оптимизация формы эритроцита в соответствии с данными атомно-силовой микроскопии.*- Математическая морфология. Электронный математический и медико-биологический журнал. Том 12. Вып. 1. 2013.

Расчёт оптимальных размеров насадки плёночного охладителя

В. Х. Кириллов, Н. П. Худенко

(ОНАПТ, Одесса, Украина)

E-mail address: khudenkon@mail.ru

Разработана методика расчёта оптимальных размеров насадки противоточной вентиляторной градирни. Решается задача нелинейного программирования минимизации стоимости аппарата, отнесённой к году эксплуатации.

Для определения оптимальных эксплуатационных и конструктивных параметров градирни экономическая эффективность может быть записана в виде приведенных затрат [1]

$$\prod = E + \frac{k}{\tau_1},$$

где E – годовые эксплуатационные расходы, грн/год; $\frac{k}{\tau_1}$ - капиталовложения, приходящиеся на один год нормативного срока окупаемости τ_1, грн/год;

Цена аппарата определяется соотношением

$$\Psi_{an} = M_{an} K_{an},$$

где M_{an} – масса, т; K_{an} – цена единицы массы аппарата, грн/т. Масса аппарата равна

$$M_{an} = nS\delta\rho = nLH\delta\rho,$$

где n – количество листов плоскопараллельной насадки; S – площадь листа ($S = LH$, L – длина листа, м; H – высота насадки, м); δ - толщина листа, мм; ρ - плотность материала насадки (алюминий, т/м^3).

Удельные капиталовложения в насосы (консольные) и вентиляторы (осевые) включают в себя их стоимость совместно с электродвигателями и стоимости монтажа. Эти затраты, по данным (http: //www.sanventika.ru) можно определить по уравнениям

$K_1 = c_1 + \alpha_1 N_1^{b_1}$ грн/кВт ($a_1 = 1,103, \quad b_1 = 3,411, \quad c_1 = 740,374$)

$K_2 = a_2 N_2^{b_2}$ грн/кВт ($a_2 = 599,426, \quad b_2 = 0,3058$), где $N_1^{b_1}$, $N_2^{b_2}$ мощности насоса и вентилятора.

Задача оптимизации решается при ограничении связанного с установлением зависимости температуры жидкости на выходе из аппарата от независимых переменных

$$t_B = t(n, L, H, G_\Gamma^m).$$

Получены оптимальные значения эксплуатационной (G_Γ^m - массовый расход воздуха) и конструктивных (n, L, H – n - количество листов; L – длина насадки; H - высота насадки) переменных, соответствующих минимуму капиталовложений в аппарат и вентиляторы, отнесённых к году окупаемости для типоразмерного ряда градирин.

Список литературы

[1] В. П. Алексеев, Э. Д. Понамарёв, Н. Г. Сурилов. К выбору оптимальной конструкции градирен // Холодильная техника. № 12, (1971), С. 41- 43.

Инволютивные гиперраспределения и голоморфные векторные поля на почти эрмитовых многообразиях

В. Ф. Кириченко

(МПГУ, Москва, Россия)

E-mail address: `highgeom@yandex.ru`

О. Е. Арсеньева

(МПГУ, Москва, Россия)

Пусть M – n-мерное гладкое многообразие, $\mathfrak{X}(M)$ – $C^\infty(M)$-модуль гладких векторных полей на M, d – оператор внешнего дифференцирования, $\mathfrak{L}_X$ – оператор дифференцирования Ли в направлении векторного поля X. Все многообразия, тензорные поля и т.п. объекты предполагаются гладкими класса C^∞.

Фиксируем векторное поле $\xi \in \mathfrak{X}(M)$. Хорошо известно, что оно порождает локальную однопараметрическую группу диффеоморфизмов $\mathcal{F}_t$ многообразия M. Рассмотрим дифференциально-геометрическую структуру $\mathcal{S} = \{T_1, \ldots, T_N\}$ на M, определенную конечным числом тензорных полей на M.

Определение 1. *Структура $\mathcal{S}$ называется* ξ-инвариантной, *если каждый из тензоров, ее составляющих, инвариантен относительно операций увлечения, порожденных элементами локальной однопараметрической группы $\mathcal{F}_t$.*

Определение 2. *[1] Векторное поле $\xi \in \mathfrak{X}(M)$ называется* торсообразующим, *если*

$$\nabla\xi = \rho \operatorname{id} + a \otimes \xi$$

и называется псевдо-торсообразующим, *если $\nabla\xi = \rho J + a \otimes \xi$, для некоторых $\rho \in C^\infty(M)$ и $a \in \mathfrak{X}^*(M)$. Дифференциальную 1-форму a и функцию ρ назовем* характеристическими. *Торсообразующее векторное поле называтся* концциркулярным, *если $da = 0$, и называется* спецконциркулярным, *если $a = 0$.*

Определение 3. *Векторное поле ξ на почти эрмитовом многообразии M называется* голоморфным, *если эндоморфизм J ξ-инвариантен.*

Теорема 1. *Торсообразующее векторное поле ξ на почти эрмитовом многообразии M голоморфно тогда и только тогда, когда*

$$\nabla_\xi(J)X = a(JX)\xi - a(X)J\xi; \qquad X \in \mathfrak{X}(M).$$

Теорема 2. *Гиперраспределение на почти эрмитовом многообразии, порожденное дифференциальной формой, дуальной голоморфному торсообразующему векторному полю на этом многообразии является вполне интегрируемым.*

Список литературы

[1] *Аминова А.В.* Проективные преобразования псевдоримановых многообразий // Москва, Янус-К, 2003, 619 с.

Абсолютно торсообразующие векторные поля на ξ-инвариантных дифференциально-геометрических структурах

В. М. Кузаконь

(ОНАПТ, Одесса, Украина)

E-mail address: kuzakon_v@ukr.net

Изучаются дифференциально-геометрические структуры $\mathcal{S} = \{T_1, \ldots, T_N\}$ на M, определенные конечным числом тензорных полей на M. Примерами таких структур являются римановы структуры ($N = 1$), почти эрмитовы структуры ($N = 2$), почти контактные структуры ($N = 3$), и т.п.

Определение 1. *Структура $\mathcal{S}$ называется* ξ-инвариантной*, если каждый из тензоров, ее составляющих, инвариантен относительно операций увлечения, порожденных элементами локальной однопараметрической группы $\mathcal{F}_t$.*

Рассмотрим шесть наиболее изученных подклассов класса почти эрмитовых структур вместе с условиями , их определяющими [3]:

- Почти келеровы (AK): $d\Omega = 0$;
- Приближенно келеровы (NK): $\nabla_X(J)Y + \nabla_Y(J)X = 0$;
- Квазикелеровы (QK): $\nabla_X(J)Y + \nabla_{JX}(J)(JY) = 0$;
- Эрмитовы (H): $\nabla_X(J)Y - \nabla_{JX}(J)(JY) = 0$;
- Келеровы (K): $\nabla J = 0$;
- Локально конформно-келеровы (LCK-многообразия)

Определение 2. *Торсообразующее векторное поле ξ на почти эрмитовом многообразии (M, J, g) назовем* абсолютным*, если векторное поле $J\xi$ тоже торсообразующее.*

Доказаны следующие теоремы:

Теорема 1. *Торсообразующее векторное поле $\xi \in \mathfrak{X}(M)$ будет абсолютно торсообразующим тогда и только тогда, когда*

$$\nabla_X(J)\xi = 0 \qquad (X \in \mathfrak{X}(M)).$$

Теорема 2. *Абсолютно торсообразующее векторное поле на приближенно келеровом многообразии голоморфно тогда и только тогда, когда оно спецконциркулярно.*

Список литературы

[1] В. Ф. Кириченко , В. М. Кузаконь *О геометрии голоморфных торсобразующих векторных полей на почти эрмитовых многообразиях*,- Укр. матем. ж., 2013, т.65, No 7, с.1005-1008.

[2] А. В. Аминова *Проективные преобразования псевдоримановых многообразий*,- Москва, Янус-К, 2003, 619 с.

[3] A. Gray , Hervella *The sixteen classes of almost Hermitian manifolds and their linear invariants* ,-Ann. Math. pure and appl. 123 (1980), 35-58.

4-квазипланарные отображения полукватернионных многообразий

И. Н. Курбатова, М. Хаддад

(ОНУ, Одесса, Украина)
(Международный университет Вади, Сирия)

E-mail address: irina.kurbatova27@gmail.com

Ранее мы рассматривали 4-квазипланарные отображения почти кватернионных многообразий ([1]).

Введем в рассмотрение структуру, которая порождается парой почти комплексных структур ([2]), коммутирующих между собой. Назовем ее *полукватернионной*. Соответственно, назовем *почти полукватернионным* риманово пространство V_n с заданными на нем почти комплексными структурами $\overset{1}{F}$ и $\overset{2}{F}$, которые наряду с

$$\overset{1}{F}{}_i^\alpha \overset{1}{F}{}_\alpha^h = -\delta_i^h, \quad \overset{2}{F}{}_i^\alpha \overset{2}{F}{}_\alpha^h = -\delta_i^h \tag{1}$$

удовлетворяют условиям

$$\overset{1}{F}{}_i^\alpha \overset{2}{F}{}_\alpha^h - \overset{2}{F}{}_i^\alpha \overset{1}{F}{}_\alpha^h = 0. \tag{2}$$

Тензор

$$\overset{3}{F}{}_i^h = \overset{1}{F}{}_i^\alpha \overset{2}{F}{}_\alpha^h,$$

очевидно, определяет структуру почти произведения :

$$\overset{3}{F}{}_i^\alpha \overset{3}{F}{}_\alpha^h = \delta_i^h.$$

Как обычно, под келеровой будем понимать полукватернионную структуру на V_n, для которой

$$\overset{s}{F}{}_{i,j}^h = 0, \quad s = 1, 2, 3.$$

Показано, что келерово полукватернионное пространство приводимо.

Рассмотрим (псевдо-)римановы пространства (V_n, g_{ij}) и $(\overline{V}_n, \overline{g}_{ij})$ с полукватернионными келеровыми структурами $\overset{s}{F}$, $\overset{s}{\overline{F}}$, $s = 1, 2, 3$, находящиеся в 4КПО, сохраняющем структуру. Тогда в общей по отображению системе координат (x^i) имеют место

$$\overline{\Gamma}_{ij}^h(x) = \Gamma_{ij}^h(x) + \sum_{s=0}^{3} \overset{s}{q}_{(i}(x) \overset{s}{F}{}_{j)}^h(x),$$

где

$$\overset{\circ}{F}{}_i^h = \delta_i^h, \quad \overset{3}{F}{}_i^h = \overset{1}{F}{}_i^\alpha \overset{2}{F}{}_\alpha^h, \quad \overset{s}{F}{}_i^h(x) = \overset{s}{\overline{F}}{}_i^h(x),$$

$\overset{s}{q}_i(x)$ - некоторые ковекторы.

Выявлены структурные особенности такого отображения. Приводится эффективный способ конструирования полукватернионных келеровых пространств и их 4-квазипланарных отображений.

Список литературы

[1] И. Н. Курбатова *О диффеоморфизмах почти кватернионных многообразий.*,- Мат.Студії. - 2013. - Т.40, No. 1.- С. 95-103.

[2] Д. В. Беклемишев *Дифференциальная геометрия пространств с почти комплексной структурой* .,- Итоги науки: Геометрия, 1963. М.: ВИНИТИ.1965 165–212.

О специальных почти геодезических отображениях пространств аффинной связности с кручением

Л. П. Ладыненко

(ПНПУ, Одесса, Украина)

E-mail address: marbel@ukr.net

Рассматриваются пространства аффинной связности A^n класса C^r с кручением ($n > 2$, $r > 1$). Как известно ([1]), кривая L называется почти геодезической линией пространства A^n, если существует компланарное вдоль L двумерное распределение E_2, которому в кажой точке принадлежит касательный вектор этой кривой. Отображение пространства аффинной связности A^n на пространство аффинной связности $\bar{A}^n$, при котором кажая геодезическая линия пространства A^n переходит в почти геодезическую линию пространства $\bar{A}^n$, называется почти геодезическим. Как и для пространств аффинной связности без кручения, для пространств аффинной связности с кручением существуют три типа почти геодезических отображений: Π_1, Π_2, Π_3 ([2]).

При почти геодезическом отображении типа Π_2 каждая геодезическая линия пространства A^n переходит в почти геодезическую линию пространства $\bar{A}^n$, для которой поле компланарного двумерного распределения E_2 определяется касательным вектором λ^h и вектором $F^h_\alpha \lambda^\alpha$, являющимся результатом воздействия на касательный вектор λ^h некоторого аффинора F^h_i([1;2])

Наибольший интерес представляют почти геодезические отображения типа Π_2, удовлетворяюие условию взаимности. Это такие отображения типа Π_2 , обратные к которым также являются отображениями типа Π_2 и соответствуют тому же аффинору.

В отличие от отображений типа Π_2 пространств аффинной связности без кручения, для пространств аффинной связности с кручением из условия взаимности не вытекает естественным образом каких-либо алгебраических условий на аффинорную структуру F^h_i([2]). По аналогии с отображениями типа Π_2 пространств аффинной связности без кручения здесь рассматривают так называемые отображения $\Pi^2_2(e)$, для которых $F^h_\alpha F^\alpha_i = e\delta^h_i$, $e = \pm 1$, либо $e = 0$, а потом и отображения $\Pi^3_2(e)$ ($F^h_\alpha F^\alpha_\beta F^\beta_i = e\delta^h_i$), $\Pi^4_2(e)$ ($F^h_\alpha F^\alpha_\beta F^\beta_\gamma F^\gamma_i = e\delta^h_i$), ...,$\Pi^n_2(e)$.

Для отображений $\Pi^n_2(e)$, $n > 4$, построены инвариантные геометрические объекты типа проективных параметров Томаса и тензора Вейля.

Список литературы

[1] Синюков Н.С. *Геодезические отображения римановых пространств* .,- М.: Наука, (1979).

[2] Яблонская Н.В. *Почти геодезические отображения пространств аффинной связности с кручением.*, - Рук. деп. в ВИНИТИ 19 июня 1979г., № 2190-79 Деп.

О сердцевине некоторой четырехмерной левой ткани Бола

А. А. Михеева

(Тверской госуниверситет, Тверь, Россия)

E-mail address: heathjensen@yandex.ru

Мы продолжаем изучение сердцевины левой три-ткани Бола B_l, начатое в [1], [2]. Три-ткани Бола образуют особый класс тканей, связанных с симметрическими пространствами, которые порождаются сердцевинами этих тканей [3]. В настоящей работе мы исследуем четырехмерные ткани B_l с одной и той же сердцевиной. Пусть уравнение ткани B_l записано в виде

$$z = f(x, y), \quad x, y, z \in R^r,$$

тогда сердцевина ткани B_l задается уравнением [3]:

$$f(a, f^{-1}(b, f(a, y))) = f(c, y), \quad a, b, c \in X, \tag{1}$$

где a, b, c - параметры вертикальных слоев, входящих в произвольную левую конфигурацию (B_l). Рассмотрим четырехмерную нерегулярную групповую три-ткань R, определяемую единственной неабелевой двумерной группой Ли

$$z^1 = e^{x^2} y^1 + x^1, \quad z^2 = x^2 + y^2.$$

Используя (1), находим уравнения сердцевины CR в виде:

$$c^1 = a^1 + (a^1 - b^1)e^{a^2 - b^2}, \quad c^2 = 2a^2 - b^2.$$

Верна

Теорема. *Пусть R - четырехмерная групповая три-ткань, определяемая единственной двумерной неабелевой группой Ли. Существует всего две негрупповые четырехмерные левые три-ткани Бола с той же сердцевиной CR, левыми обратными парастрофами к ним будут средние ткани Бола Π_3 и Π_4 параболического типа (по классификации А.Д. Иванова, см. [4]).*

Список литературы

[1] Михеева А.А., Толстихина Г.А. *О шестимерных левых три-тканях Бола с общей сердцевиной* // Изв. Вузов. Мат. 2014, №10, с. 43 – 53.

[2] Михеева А.А., Толстихина Г.А. *О сердцевине некоторой четырехмерной три-ткани Бола* // Proceedings of the International Geometry Center, V.6, №1, 2013, Odessa, с. 34 – 41.

[3] Акивис М. А., Шелехов А. М. *Многомерные три-ткани и их приложения*//монография/ Тверь, ТвГУ. 2010. 308 с.

[4] Иванов А. Д. *Об интерпретации четырехмерных тканей Боля в трехмерном проективном пространстве*// Геометрия однородных пространств, М.: Моск. гос. пед. ин-т. 1973. С. 42–57.

КРУЧЕНИЕ ОБЪЕКТА СВЯЗНОСТИ НА СЕМЕЙСТВЕ ЦЕНТРИРОВАННЫХ ПЛОСКОСТЕЙ, ОБОБЩАЮЩЕМ ПОВЕРХНОСТЬ

О. М. Омельян

(Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград, Россия)

E-mail address: olga_omelyan2002@mail.ru

В работе индексы будут принимать следующие значения:

$$i, \dots = \overline{1,p};\ a, \dots = \overline{p+1,m};$$

$$\alpha, \dots = \overline{m+1, 2m-p};\ u, \dots = \overline{2m-p+1,n}.$$

В проективном пространстве P_n продолжим рассмотрение m-мерного семейства B_m, описанного центрированной плоскостью L_m размерности m, пересекающейся с касательной плоскостью T_m к поверхности центров по p-мерной плоскости L_p $(L_m \bigcap T_m = L_p,\ 0 \le p \le m)$. Уравнения этого семейства B_m были получены ранее в работе [1]. В главном расслоении $G(B_m)$, ассоциированном с этим семейством, была задана групповая связность Γ и найдены дифференциальные уравнения для его компонент [1].

Внесем в структурные уравнения базисных форм ω^i, ω^α семейства B_m формы групповой связности $\tilde{\omega} = \omega - \Gamma_i \omega^i - \Gamma_\alpha \omega^\alpha$, а именно:

$$D\omega^i = \omega^j \wedge \tilde{\omega}^i_j + \omega^\alpha \wedge \tilde{\omega}^i_\alpha + S^i_{jk}\omega^j \wedge \omega^k + 2S^i_{j\alpha}\omega^j \wedge \omega^\alpha + S^i_{\alpha\beta}\omega^\alpha \wedge \omega^\beta, \tag{1}$$

$$D\omega^\alpha = \omega^\beta \wedge \tilde{\omega}^\alpha_\beta + S^\alpha_{ij}\omega^i \wedge \omega^j + 2S^\alpha_{i\beta}\omega^i \wedge \omega^\beta + S^\alpha_{\beta\gamma}\omega^\beta \wedge \omega^\gamma,$$

где

$$S^i_{jk} = \Gamma^i_{[jk]}, S^\alpha_{ij} = 1/2(\Gamma^i_{j\alpha} - \Gamma^i_{\alpha j}), S^i_{\alpha\beta} = \Gamma^i_{[\alpha\beta]}, \tag{2}$$
$$S^\alpha_{ij} = \Lambda^\alpha_{[ij]}, S^\alpha_{i\beta} = 1/2(\Lambda^\alpha_{i\beta} - \Gamma^\alpha_{\beta i}), S^\alpha_{\beta\gamma} = \Gamma^\alpha_{[\beta\gamma]}.$$

Квадратные скобки в (2) означают альтернирование. В правых частях равенств (2) содержатся компоненты расширенной аффинной $\{\Gamma^i_{jk}, \Gamma^i_{j\alpha}\}$ и расширенной линейной связности $\{\Gamma^\alpha_{\beta i}, \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\}$, поэтому объект S будем называть объектом кручения этих связностей на семействе центрированных плоскостей B_m.

Учитывая дифференциальные сравнения [1] для компонент указанных выше связностей, приходим к следующим сравнениям:

$$\Delta S^\alpha_{ij} \equiv 0, \Delta S^\alpha_{i\beta} - S^\alpha_{ij}\omega^j_\beta \equiv 0, \Delta S^\alpha_{\beta\gamma} - S^\alpha_{i\gamma}\omega^i_\beta + S^\alpha_{i\beta}\omega^i_\gamma \equiv 0, \dots \tag{3}$$

Теорема 1. *Объект кручения S групповой связности Γ является тензором, содержащим 1 простейший подтензор S^α_{ij} – тензор неголономности данного семейства и 4 простых подтензора $\{S^\alpha_{ij}, S^\alpha_{i\beta}\}$,$\{S^\alpha_{ij}, S^\alpha_{i\beta}, S^\alpha_{\beta\gamma}\}$,$\{S^\alpha_{ij}, S^i_{jk}\}$, $\{S^\alpha_{ij}, S^\alpha_{i\beta}$, $\{S^\alpha_{ij}, S^\alpha_{i\beta}, S^\alpha_{\beta\gamma}\}$, $\{S^\alpha_{ij}, S^\alpha_{i\beta}$, $S^i_{jk}, S^i_{j\alpha}\}$.*

Список литературы

[1] Омельян О.М. *Объект ассоциированной связности на семействе центрированных плоскостей, обобщающем поверхность*, // Тр. межд. конф. Одесса. С. 108 - 109 (2008)

Инфинитезимальные конформные преобразования в пространстве второго приближения

Покась С. М., Крутоголова А. В.

(Одесский национальный университет имени И.И. Мечникова, Одесса, Украина)

E-mail address: `pokas@onu.edu.ua, 01link01@rambler.ru`

Для риманова пространства $V_n(x;g)$ ненулевой постоянной кривизны K строим пространство второго приближения $\widetilde{V}^2_n(y;\widetilde{g})$ [?]:

$$\widetilde{g}_{ij}(y) = \underset{\circ}{g}_{ij} + \frac{K}{3}\left(\underset{\circ}{g}_{il_1}\,\underset{\circ}{g}_{jl_2} - \underset{\circ}{g}_{ij}\,\underset{\circ}{g}_{l_1l_2}\right)y^{l_1}y^{l_2}, \qquad (1)$$

где $\underset{\circ}{g}_{ij} = g_{ij}(M_0)$, M_0 - произвольная фиксированная точка пространства V_n.

В $\widetilde{V}^2_n$ исследуются инфинитезимальные конформные преобразования

$$y'^h = y^h + \widetilde{\xi}^h(y)\delta t. \qquad (2)$$

Известно([1]), что в $\widetilde{V}^2_n$ векторное поле $\widetilde{\xi}^h(y)$ определяет конформное преобразование тогда и только тогда, когда

$$L_{\widetilde{\xi}}\widetilde{g} = \widetilde{\psi}\widetilde{g}. \qquad (3)$$

Функцию $\widetilde{\psi}(y)$ задаем в виде:

$$\widetilde{\psi}(y) = \sum_{\sigma=0}^{\infty}\underset{\sigma}{b}, \quad \underset{\sigma}{b} = b_{l_1l_2\ldots l_\sigma}y^{l_1}y^{l_2}\cdot\ldots\cdot y^{l_\sigma}, \quad b_{l_1l_2\ldots l_\sigma} - const. \qquad (4)$$

Вектор $\widetilde{\xi}^h(y)$ ищем в виде:

$$\widetilde{\xi}^h(y) = \sum_{\sigma=0}^{\infty}\underset{\sigma}{a^h}, \quad \underset{\sigma}{a^h} = a^h_{l_1l_2\ldots l_\sigma}y^{l_1}y^{l_2}\cdot\ldots\cdot y^{l_\sigma}, \quad a^h_{l_1l_2\ldots l_\sigma} - const. \qquad (5)$$

В результате анализа обобщенных уравнений Киллинга (3) получаем:

$$\widetilde{\xi}^h(y) = a^h + a^h_l y^l + \frac{K}{3}\left(\underset{\circ}{g}_{l_1\beta}\,\delta^h_{l_2} - \underset{\circ}{g}_{l_1l_2}\,\delta^h_\beta\right)\left[a^\beta\left(1+\sum_{p=2}^{\infty}\frac{1}{2p-1}A^{p-1}\right) + \frac{3A}{K}\sum_{p=2}^{\infty}\frac{1}{2p}\frac{p+1}{2p+1}\underset{2p-3}{b^\beta} + \right.$$
$$\left. + \frac{3}{K}\left(\sum_{p=2}^{\infty}\sum_{s=1}^{p-1}\frac{(-1)^p(-1)^{s+1}}{4(2p-1)}\frac{2p-2s-1}{p-s}\underset{2p-2s-2}{b^\beta}A^s + \sum_{p=3}^{\infty}\sum_{s=2}^{p-1}\frac{p-s}{2p-2s+1}\underset{2p-2s+1}{b^\beta}A^s\right)\right]y^{l_1}y^{l_2} +$$
$$+ y^h\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{p+1}\underset{p}{b} - \frac{3A}{2K}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{p+1}\underset{p-1}{b^h}, \quad A = \frac{K}{3}\underset{\circ}{g}_{l_1l_2}\,y^{l_1}y^{l_2}. \qquad (6)$$

Ряды (6) сходятся абсолютно и равномерно на множестве $|K\,\underset{\circ}{g}_{l_1l_2}\,y^{l_1}y^{l_2}| < 1$.

Список литературы

[1] А. В. Аминова *Проективные преобразования псевдоримановых многообразий* Москва, Янус-К, 2003, 619

[2] С. М. Покась *Группы Ли движений в римановом пространстве второго приближения* известия Пенз. гос. пед. ун-та., физ.-матем. науки., №26, 2011, 173–183.

Эффект Магнуса в космосе

М. О. Рахула

(Тартуский университет, Тарту, Эстония)

Эффект Магнуса, *при смещении вращающегося тела в некотором направлении в теле вовникает сила, перепендикулярная направлению смещения*, обосновывается скобкой векторных полей:

$$X = \frac{\partial}{\partial x}, \ \ Y = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y} \ \Rightarrow \ [XY] = YX - XY = -\frac{\partial}{\partial y} \ \perp \ \frac{\partial}{\partial x}.$$

Поле вращений Y понимается как поле скоростей, а производная Ли $[XY]$ как поле ускорений, или же как силовое поле. Назовём это поле *M-силой*.

M-сила мощна при больших размерах вращающихся тел, а также при больших скоростях вращения и смещения. На Земле M-сила слаба и малозаметна: это круговороты в атмосфере, торнадо, гироскоп, летающий диск, качающийся шланг с водой, стаи птиц, косяки рыб, где более-менее заметно воздействие M-силы. В космосе вращаются большие системы. Благодаря M-силе, планетные системы и галактики, вращающиеся вокруг одной оси – плоские диски, а солнца, планеты и луны, вращающиеся более чем вокруг одной оси – круглые шары. Малые тела, как метеориты и ядра комет, бесформенны.

Дискообразность и шарообразность вращающихся тел – свойство M-силы. В одних случаях эта сила направлена в плоскость, в других случаях огибает сферу. M-силой объясняется и то, почему небесные тела в одних случаях излучают энергию, в других случаях поглощают её, а в треьих случаях пульсируют. Загадка вскрыта не в самих движениях, а во взаимодействии различных движений.

Встречающиеся в литературе аэро- и гидродинамические обоснования эффекта Магнуса несостоятельны.

О 2F-планарных отображениях римановых пространств с кубической абсолютно параллельной структурой

В. В. Регрут, И. Н. Курбатова,

(ОНУ, Одесса, Украина)

E-mail address: `irina.kurbatova27@gmail.com`

В ([1])было введено понятие pF-планарного отображения аффинносвязных и римановых пространств. Там же исследовались 2F-планарные отображения (псевдо-)римановых пространств (V_n, g_{ij}, F^h_i) и $(\overline{V}_n, \overline{g}_{ij}, \overline{F}{}^h_i)$ с абсолютно параллельной кубической структурой, основные уравнения которых в общей по отображению системе координат (x^i) имеют вид:

$$\overline{\Gamma}{}^h_{ij}(x) = \Gamma^h_{ij}(x) + \sum_{s=0}^{2} \overset{s}{q}_{(i}(x)\overset{s}{F}{}^h_{j)}(x),$$

где

$$\overset{\circ}{F}{}^h_i = \delta^h_i, \quad \overset{1}{F}{}^h_i = F^h_i, \quad \overset{2}{F}{}^h_i = \overset{1}{F}{}^\alpha_i \overset{1}{F}{}^h_\alpha, \quad \overset{s}{F}{}^h_i(x) = \overline{\overset{s}{F}}{}^h_i(x),$$
$$F^h_\alpha F^\alpha_\beta F^\beta_i = \delta^h_i, \quad g_{i\alpha}F^\alpha_j = g_{j\alpha}F^\alpha_i, \quad F^h_{i,j} = F^h_{i|j} = 0,$$

$\Gamma^h_{ij}, \overline{\Gamma}{}^h_{ij}$ - компоненты объектов связности V_n и $\overline{V}_n$, соответственно; $\overset{s}{q}_i(x)$ - некоторые ковекторы; F^h_i - аффинор; $<,>, <|>$ - знаки ковариантной производной в V_n и $\overline{V}_n$.

Мы показали, что при таких условиях на аффинор пространства V_n и $\overline{V}_n$, находящиеся в 2F-планарном отображении, являются локально приводимыми и представляют собой произведение

$$V_n = V_m \times V_{n-m}, \quad \overline{V}_n = \overline{V}_m \times \overline{V}_{n-m},$$

причем на компонентах этого произведения 2F-планарное отображение

$$f : V_n \longrightarrow \overline{V}_n$$

индуцирует геодезическое отображение ([2])

$$f_1 : V_m \longrightarrow \overline{V}_m,$$

соответствующее вектору $2\overset{\circ}{q}_b(x^a)$, $a, b = 1, 2, \ldots, m$, и F-планарное отображение([3])

$$f_2 : V_{n-m} \longrightarrow \overline{V}_{n-m},$$

соответствующее аффинору $\overset{1}{F}{}^B_A(x^C)$ определенного типа и вектору $2\overset{\circ}{q}_B(x^A)$, $A, B, C = m + 1, m + 2, \ldots, n$.

Список литературы

[1] Р. Дж. Кадем *2F-планарные отображения аффинносвязных и римановых пространств.*,- Дисс. на соиск. учен. степ. к. ф.-м. н. Одес. ОГУ, 1992 108 с.

[2] Н. С. Синюков *Геодезические отображения римановых пространств.*,- М.: Наука, Москва, 1979. 256 с.

[3] J. Mikes, A. Vanzurova, I. Hinterleitner *Geodesic Mappings and Some Generalizations.*,- Palacky University, Olomouc, Faculty of Science. Olomouc, 2009.

Координаты вершин многомерных метрически правильных срединно/триадно-усеченных симплексов

Ю. С. Резникова

(Институт математики НАН Украины, Киев, Украина)

E-mail address: `yurss@mail.ru`

Рассмотрим многомерное евклидово пространство, а также векторное метрическое пространство $\{V^n(\Re), \ \ \rho\}$, $n \ \geq \ 2$, где $\sigma \ = \ max\{0; w_1; ....; w_n\} - min\{0; w_1; ....; w_n\}$ — симметричный модуль Галицына или барицентрическая норма вектора $\vec{w} = \{w_1; ....; w_n\}$ [1].

Утверждение 1. *$n-$мерный срединно/триадно-усеченный симплекс в векторном метрическом пространстве $\{V^n(\Re), \rho\}$, $n \geq 2$, где ρ — $\sigma-$метрика, является метрически правильным, если $\forall \ \{i, j, k\} = \overline{1, n}$, $i \neq j \neq k$, координаты его вершин имеют вид:*

- *в случае срединно-усеченного симплекса*
  $A_{ij}(....; w_i; ....; w_j; ....)$, *где* $w_i = w_j = \frac{1}{2}c$, $w_k = 0 \ \forall \ k = \overline{1, n} \neq \{i, j\}$,
  $A_{i(n+1)}(....; w_i; ....)$, *где* $w_i = 0$, $w_k = -\frac{1}{2}c \ \forall \ k = \overline{1, n} \neq i$, $c = const > 0$,
- *в случае триадно-усеченного симплекса*
  $A_{ij}(....; w_i; ....; w_j; ....)$, *где* $w_i = \frac{2}{3}c$, $w_j = \frac{1}{3}c$, $w_k = 0 \ \forall \ k = \overline{1, n} \neq \{i, j\}$,
  $A_{ji}(....; w_i; ....; w_j; ....)$, *где* $w_i = \frac{1}{3}c$, $w_j = \frac{2}{3}c$, $w_k = 0 \ \forall \ k = \overline{1, n} \neq \{i, j\}$,
  $A_{i(n+1)}(....; w_i; ....)$, *где* $w_i = \frac{1}{3}c$, $w_k = -\frac{1}{3}c \ \forall \ k = \overline{1, n} \neq i$,
  $A_{(n+1)i}(....; w_i; ....)$, *где* $w_i = -\frac{1}{3}c$, $w_k = -\frac{2}{3}c \ \forall \ k = \overline{1, n} \neq i$, $c = const > 0$.

Пусть A — матрица преобразования многомерного сигма-пространства в многомерное евклидово [2], A_{ij}^T, $i, j = \overline{1, n}$, — транспонированные вектора координат вершин срединно/триадно-усеченного симплекса в многомерном сигма-пространстве.

Утверждение 2. *$n-$мерный срединно/триадно-усеченный симплекс в векторном метрическом пространстве $\{V^n(\Re), \rho\}$, $n \geq 2$, где ρ — евклидова метрика, является метрически правильным, если $\forall \ \{i, j, k\} = \overline{1, n}$, $i \neq j \neq k$, координаты его вершин имеют вид:*

- *в случае срединно-усеченного симплекса*
  $A \times A_{ij}^T(....; w_i; ....; w_j; ....)$, *где* $w_i = w_j = \frac{1}{2}c$, $w_k = 0 \ \forall \ k = \overline{1, n} \neq \{i, j\}$,
  $A \times A_{i(n+1)}^T(....; w_i; ....)$, *где* $w_i = 0$, $w_k = -\frac{1}{2}c \ \forall \ k = \overline{1, n} \neq i$, $c = const > 0$,
- *в случае триадно-усеченного симплекса*
  $A \times A_{ij}^T(....; w_i; ....; w_j; ....)$, *где* $w_i = \frac{2}{3}c$, $w_j = \frac{1}{3}c$, $w_k = 0 \ \forall \ k = \overline{1, n} \neq \{i, j\}$,
  $A \times A_{ji}^T(....; w_i; ....; w_j; ....)$, *где* $w_i = \frac{1}{3}c$, $w_j = \frac{2}{3}c$, $w_k = 0 \ \forall \ k = \overline{1, n} \neq \{i, j\}$,
  $A \times A_{i(n+1)}^T(....; w_i; ....)$, *где* $w_i = \frac{1}{3}c$, $w_k = -\frac{1}{3}c \ \forall \ k = \overline{1, n} \neq i$,
  $A \times A_{(n+1)i}^T(....; w_i; ....)$, *где* $w_i = -\frac{1}{3}c$, $w_k = -\frac{2}{3}c \ \forall \ k = \overline{1, n} \neq i$, $c = const > 0$.

Список литературы

[1] А. П. Великий, А. Ф. Турбин *Преобразования А.И.Лобанова.* – Кибернетика и системный анализ, (2004), № 5, С. 160-168.

[2] Ю. С. Резникова, Т. Г. Яремчук *Матричное преобразование многомерного сигма-пространства в многомерное евклидово.* // Современные направления теоретических и прикладных исследований '2015: Сборник научных трудов SWorld (в печати).

Глобальные решения тривиального уравнения Монжа-Ампера с изолированными особенностями.

И. Х. Сабитов

(МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия)

E-mail address: isabitov@mail.ru

Уравнение

$$z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2 = 0 \qquad (1)$$

мы называем тривиальным уравнением Монжа-Ампера. Если решение этого уравнения принадлежит классу C^2 в некотором круге с проколотым центром $M_0(x_0, y_0)$, тогда оно непрерывно продолжается в точку M_0; если же дополнительно известно, что вторые производные ограничены, тогда его первые производные тоже непрерывно продолжаются в M_0 и тогда поверхность будет гладкой развертывающейся поверхностью, см. [1]. В случае неограниченных производных второго порядка поверхность будет непрерывной, но не гладкой, имея в точке M_0 особенность в виде вершины конуса. Тем самым мы знаем локальное поведение решения уравнения в окрестности особой точки.

Если решение уравнения (1) определено над всей плоскостью и оно всюду регулярно, тогда поверхность $z - z(x, y)$ будет гладкой цилиндрической поверхностью. Спрашивается, что можно сказать о поверхности в целом, если априори предположить наличие у нее особых точек? Мы доказываем справедливость следующей теоремы.

Теорема 1. . *Пусть на плоскости (x, y) задано произвольное конечное множество точек D. Тогда существует решение уравнения (1), определенное и непрерывное на всей плоскостью, принадлежащее классу C^∞ вне точек множества D.*

В окрестностях особых точках поверхность является, конечно, конусом. Ключевой момент доказательства состоит в том, что можно так подобрать строение этих конусов, чтобы образующие разных конусов не пересекались.

Нетрудно построить пример решения уравнения (1) со счетным множеством изолированных особых точек при некотором специальном их расположении (например, все они лежат на одной прямой), но для произвольного счетного множества дискретных точек соответствующее построение остается открытым вопросом.

Автор выражает благодарность Ю.А. Аминову за указание способа построения таких конусов в случае, когда множество особых точек D состоит из вершин некоторого выпуклого многоугольника.

Список литературы

[1] И.Х. Сабитов. Изолированные особые точки решений тривиального уравнения Монжа-Ампера. Тезисы докладов Международной научной конференции "Теория операторов, комплексный анализ и математическое моделирование", пос. Дивноморск, 7-13 сентября 2014 г., Изд-во: Владикавказ, ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2014, стр. 61-62.

Один из типов геометрий касательного расслоения, порожденный инвариантными приближениями базового риманова пространства

Е. Н. Синюкова

(ПНПУ, Одесса, Украина)

E-mail address: marbel@ukr.net

Инвариантная теория приближений в римановой геометрии основывается на известном тензорном ряде Тейлора для тензорных полей [1]. Однако сложность структуры коэффициентов указанного ряда в пространствах, отнесенных к произвольной системе координат. приводит к недостаточной эффективности такого подхода. Гораздо более продуктивным оказывается использование римановой системы координат с центром в произвольной точке рассматриваемого риманова пространства. Появляется возможность получения инвариантного ряда типа Тейлора, зависящего не только от координат текущей точки, но и от касательного элемента в ней, как для любого тензора, так и для объекта аффинной связности риманова пространства V^n. [2] Это избавляет от необходимости реализации в V^n фактического перехода к римановой системе координат, что, в общем случае, практически неосуществимо.

Если в соответствующем ряде для компонент Γ^h_{ij} объекта аффинной связности риманова пространства V^n отказаться от слагаемых второго и более высоких порядков малости относительно компонент касательного элемента y^h, получим объект связности

$$\widetilde{\Gamma}^h_{ij}(x;y) = \Gamma^h_{ij}(x) - \frac{1}{3}R^h_{(ij)\alpha}(x)y^\alpha, \qquad (1)$$

определяющий на V^n геометрию, подобную финслеровой.

На касательном расслоении $T(V^n)$ рассмотрена метрика

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}(x)\widetilde{D}y^\alpha\widetilde{D}y^\beta,$$

где $g_{\alpha\beta}(x)$ — компоненты метрического тензора пространства V^n,

$$\widetilde{D}y^h = dy^h + \widetilde{\Gamma}^h_{\alpha\beta}y^\alpha dx^\beta.$$

Изучены геометрические свойства пространства с такой метрикой. Специально исследован случай, когда базовое пространство V^n является пространством постоянной кривизны.

Рассмотрены также некоторые свойства обобщенных пространств аффинной связности с объектом связности, определённым формулами (1).

Список литературы

[1] Веблен О. *Инварианты дифференциальных квадратичных форм* .,- М.: И.Л., (1948), 140 с.

[2] Синюков Н.С., Синюкова Е.Н., Мовчан Ю.А. *Некоторые актуальные аспекты развития теории геодезических отображений римановых пространств и ее обобщений.*, - Изв. вузов, Математика, № 3(382), (1994), С. 76-80.

Квазигеодезические отображения рекуррентно-параболических пространств

О. Т. Сисюк, И. Н. Курбатова

(ОНУ, Одесса, Украина)

E-mail address: irina.kurbatova27@gmail.com

Изучая проблему моделирования физических полей, академик А.З.Петров пришел к задаче квазигеодезического отображения (КГО) 4-хмерных римановых пространств сигнатуры Минковского ([1]). В ([2]) исследовались КГО римановых пространств произвольной размерности и сигнатуры.

Многообразие X_n считается наделенным *e-структурою* ([3]), если на нем определена аффинорная структура $F_i^h(x)$, удовлетворяющая условиям $F_i^\alpha F_\alpha^h = e\delta_i^h$, где $e = -1, 1$ или 0. При $e = 1$ ее называют гиперболической; при $e = -1$ - эллиптической; при $e = 0$ - параболической.

В зависимости от дифференциальных свойств аффинора в римановом пространстве с e-структурой, выделяют такие классы пространств ([4]): келерово - при $F_{i,j}^h = 0$, где «,» - знак ковариантной производной в V_n; К-пространство – при $F_{i,j}^h + F_{j,i}^h = 0$; Н-пространство - при $F_{hi,j} + F_{ij,h} + F_{jh,i} = 0$, где $F_{hi} = g_{h\alpha} F_i^\alpha$ и др.

Рекуррентно-параболической структурой на (V_n, g_{ij}) будем называть аффинорную структуру $F_i^h(x)$, для якої

$$F_i^\alpha F_\alpha^h = 0, \quad F_{ij} + F_{ji} = 0, \quad F_{ij} = F_j^\alpha g_{\alpha i},$$
$$F_{i,j}^h = \rho_j(x) F_i^h(x),$$

где ρ_j - ковектор. Само V_n при этом также будем называть *рекуррентно-параболическим.*

Рассмотрим пару римановых пространств (V_n, g_{ij}) и $(\overline{V}_n, \overline{g}_{ij})$, находящихся в КГО, основные уравнения которых в общей по отображению системе координат (x^i) имеют вид

$$\overline{\Gamma}_{ij}^h(x) = \Gamma_{ij}^h(x) + \psi_{(i}(x)\delta_{j)}^h + \varphi_{(i}(x)F_{j)}^h(x)$$
$$\overline{F}_{(ij)}(x) = 0, \qquad \overline{F}_{ij}(x) = F_j^\alpha(x)\overline{g}_{\alpha i}(x),$$

где $\overline{\Gamma}_{ij}^h, \Gamma_{ij}^h$ - компоненты объектов связности пространств $\overline{V}_n$ и V_n, соответственно; ψ_i, φ_i - ковекторы; F_i^h - аффинор.

Теорема. *Если V_n с рекуррентно-параболической структурой F_i^h допускает КГО на риманово пространство $\overline{V}_n$, то $\overline{V}_n$ по необходимости также будет рекуррентно-параболическим относительно F_i^h с тем же вектором рекуррентности*

Рассмотрено КГО рекуррентно-параболического V_n на плоское пространство $\overline{E}_n$. Получена структура тензора Римана такого V_n. В частности, показано, что оно является Риччи-плоским и симметрическим.

Список литературы

[1] А. З. Петров *Моделирование физических полей* .,- Гравитация и теория относительности, 1968, вып.4-5. Изд. Казанск. ун-та. С. 7–21.

[2] И. Н. Курбатова *Квази-геодезические отображения римановых пространств.*,- Дисс. на соиск. учен. степ. к. ф.-м. н. Одес. ОГУ, 1979 99 с.

[3] Н. С. Синюков *Геодезические отображения римановых пространств.*,- М.: Наука, Москва, 1979. 256 с.

[4] Д. В. Беклемишев *Дифференциальная геометрия пространств с почти комплексной структурой* .,- Итоги науки: Геометрия, 1963. М.: ВИНИТИ.1965 165–212.

КАНОНИЧЕСКИЕ БАРИЦЕНТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ НЕВЫРОЖДЕННЫХ КРИВЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА

П. Г. Стеганцева

(ЗНУ, Запорожье, Украина)

E-mail address: `steg_pol@mail.ru`

Первым шагом при использовании координатного метода является выбор системы координат, и этот выбор зависит от задачи. Существует класс задач, которые удобно решать в барицентрической системе координат ([1])([2]).

Нормированными барицентрическими координатами точки M плоскости называются ее барицентрические координаты m_1, m_2, m_3 относительно правильного треугольника ABC со стороной 1. Расстояние между точками $P(p_1, p_2, p_3)$ и $G(g_1, g_2, g_3)$ в канонических координатах вычисляется по формуле

$$PG^2 = -(p_2 - g_2)(p_3 - g_3) - (p_1 - g_1)(p_3 - g_3) - (p_1 - g_1)(p_2 - g_2).$$

Из определения эллипса каждая его точка обладает свойством $MF_1 + MF_2 = 2a$, где F_1,F_2 - фокусы, $2c$ – расстояние между фокусами и $2a > 2c$. Выберем каноническую барицентрическую систему координат так, чтобы фокальная ось была параллельна стороне AB координатного треугольника. Если (c_1, c_2, c_3) – центр эллипса, то $F_1 = (c + c_1, c_2 - c, c_3)$, $F_2 = (c_1 - c, c_2 + c, c_3)$ - фокусы.

После двукратного возведения в квадрат важным моментом является преобразование полученного уравнения к так называемому «симметричному виду». Для этого используем очевидный факт, что сумма барицентрических координат вектора равна нулю и равенства

$$\alpha_1^2 = -\alpha_1\alpha_2 - \alpha_1\alpha_3, \alpha_2^2 = -\alpha_2\alpha_1 - \alpha_2\alpha_3, \alpha_1^2 = -\alpha_3\alpha_1 - \alpha_3\alpha_2,$$

справедливые для барицентрических координат произвольного вектора. Получим

$$(-4a^2+4c^2)(x_1-c_1)(x_2-c_2)+(-4a^2+c^2)(x_1-c_1)(x_3-c_3)+(-4a^2+c^2)(x_2-c_2)(x_3-c_3) = -4a^2c^2+4a^4.$$

Замена $a^2 - c^2 = b^2$ и деление на $-4a^2b^2$ дают канонический вид уравнения эллипса

$$\frac{(x_1 - c_1)(x_2 - c_2)}{4a^2b^2} + \frac{3a^2 + b^2}{4a^2b^2}((x_1 - c_1)(x_3 - c_3) + (x_2 - c_2)(x_3 - c_3)) = -1.$$

Заметим, что при $a = b$ оно имеет вид $(x_1-c_1)(x_2-c_2)+(x_1-c_1)(x_3-c_3)+(x_2-c_2)(x_3-c_3) = -a^2$ и совпадает с уравнением окружности с центром в точке (c_1, c_2, c_3) и радиусом a ([1]).

Каноническое уравнение гиперболы с центром (c_1, c_2, c_3) имеет вид

$$\frac{(x_1 - c_1)(x_2 - c_2)}{4a^2} + \frac{3a^2 + b^2}{4a^2b^2}((x_1 - c_1)(x_3 - c_3) + (x_2 - c_2)(x_3 - c_3)) = 1,$$

а каноническое уравнение параболы -

$$\frac{1}{4}(x_1 - c_1)(x_3 - c_3) + \frac{1}{4}(x_2 - c_2)(x_3 - c_3) = p(x_1 - c_1) - (x_2 - c_2),$$

где p - параметр, а (c_1, c_2, c_3) - вершина.

Список литературы

[1] М. Б. Балк *Геометрия масс*/М.Б. Балк, В.Г. Болтянский. -М.:Наука, (1987), 160с.

[2] Я. П. Понарин *Элементарная геометрия.В 3-х т.Т.3: Треугольники и тетраэдры.* -М.:МЦНМО, (2009), 192с.

Теория сложных сетей – новая парадигма в анализе динамики финансовых рынков

А. Ш. Тулякова

(ОНАПТ, Одесса, Украина)

E-mail address: `tuliakovaanna@gmail.com`

Авторитетный научный журнал «Nature Physics» в марте 2013 года «фокусом» выпуска обозначил «Сложные сети в финансах», и призвал физиков и математиков заняться исследованиями возможности эффективного применения новой быстро развивающейся научной области «теории сложных сетей» к актуальнейшим проблемам в устройстве мировой финансовой системы. ([1]) Вообще говоря, теория сложных сетей (ТСС) представляет собой не отдельное направление, а весьма обширную междисциплинарную область знаний, в которую входят исследования самого разнообразного характера об устройстве мира. ТСС бурно развивается, сейчас закладываются ее основные понятия и получены только первые результаты. Работающие в этой области исследователи пришли из математики, физики, биологии, медицины, эпидемиологии, телекоммуникаций, информатики, социологии, экономики. Соответственно результаты исследований имеют как теоретическое значение, так и практические приложения в этих науках. В контексте ТСС, сложные сети (англ. complex networks) – это графы (сети) с нетривиальными топологическими свойствами – свойствами, которые не встречаются в простых сетях, таких как регулярные решетки или чисто случайные графы, но часто наблюдаются в графах, моделирующих реальные системы. Именно топологические свойства сети, рассматриваемые отвлеченно от природы происхождения исследуемой системы, существенно определяют функционирование сети, и поэтому составляют основной предмет исследования ТСС. В нашей работе ([2]) излагается концептуально новая методология анализа финансовых временных рядов, которую авторы применяют наряду с другими для исследования сложности финансовых рынков. Суть этой методологии состоит в том, что для построения новых мер динамической сложности рынка временные ряды финансовых данных предварительно преобразуют в сложные сети на основе идеи рекуррентности точек фазовой траектории системы. Затем для построенной сети рассчитывается широкий спектр показателей, отражающих различные топологические характеристики сети. Сам метод преобразования временного ряда в так называемую «рекуррентную сеть» взят из работы ([3]), там же есть аналитический обзор и других существующих методов преобразования временного ряда в граф.

Список литературы

[1] *Nature Physics.*,- March 2013, volume 9, issue 3, pp. 119-197. http://www.nature.com/nphys/journal/v9/n3/index.html

[2] В. М. Соловйов, А. Ш. Тулякова, *Методологія дослідження динамічної складності фондових ринків з використанням рекурентних мереж.*,- Проблеми моніторингу, моделювання та менеджменту емерджентної економіки. Колективна монографія. Ред. Соловйов В.М. Черкаси "Брама-Україна",(2013), с. 91-111.

[3] R. V. Donner, M. Small, J. F. Donges,N. Marwan, Y. Zou, R. Xiang, J. Kurths, *Recurrence-based time series analysis by means of complex network methods.*,- ArXiv:1010.6032v1.(2010).

Восхождение по размерности

А. Ф. Турбин

(НПУ имени М. Драгоманова, Киев, Украина)

E-mail address: `turbin@imath.ua`

Ю. Д. Жданова

(ГУТ, Киев, Украина)

E-mail address: `yuzhdanova@yandex.ru`

Первым математиком, рискнувшим «увидеть» аналоги правильных многогранников в пространствах высоких размерностей, был швейцарский школьный учитель Людвиг Шлефли [1]. В середине 19в. он привел аналоги тетраэдров, октаэдров, кубов, икосаэдров и додекаэдров в E^4 и аналоги тетраэдров, октаэдров, кубов в $E^n, n > 4$. В начале 20 в. геометры приняли решение: других аналогов нет!

Другие аналоги правильных многогранников в E^4 есть! И число их бесконечно (см. [2]) .

Мегатетраэдр $(10, 30, 30, 10)$ в E^4 – правильный самодвойственный многогранник, трёхмерные грани которого тетраэдры.

Мегаоктаэдр $(10, 40, 40, 10)$ в E^4 – правильный (не самодвойственный) многогранник, трёхмерные грани которого октаэдры.

Мегакубоэдр А.Д. Милки $(10, 20, 20, 10)$ в E^4 – правильный (двойственный мегаоктаэдру $(10, 40, 40, 10)$ многогранник, трёхмерные грани которого кубы.

Мегаикосаэдр Дж. Грегори–А. В. Погорелова $(24, 144, 144, 24)$ – звездно правильный многогранник в E^4, трёхмерные грани которого икосаэдры.

В пространствах более высоких размерностей от многообразия и разнообразия аналогв платоновых тел захватывает дух. . .

Есть два маршрута «восхождения по размерности. Первый маршрут (наиболее простой).

Берется какой-нибудь правильный многогранник в $E^n, n > 4$ (их число бесконечно). В зависимости от типа двухмерный грани (квадрат или треугольник) строится гиперпризма или гиперантипризма (уже в E^{n+1}). Пятимерная гиперпризма А.Д. Милки $(20 = 10 + 10, 50 = 20 + 20 + 10, 60, 50, 20)\,, 20 - 50 + 60 - 50 + 20 = 0$.

Второй маршрут (трудный и очень опасный).

Берутся два и более одинаковых правильных многогранника в $E^n, n > 4$, и осуществляется их «геометрический суперсинтез» (геометрический аналог термоядерного синтеза в ядрах звезд–гигантов).

«Геометрический суперсинтез» двух октаэдров $(6, 12, 8)$ дает мегаоктаэдр Говарда Брендта $(12 = 6 + 6, 48 = 12 + 12 + 24, 48, 12)$.

Список литературы

[1] Coxeter, H. S. M. *Regular Polytopes, 3rd ed* . – New York: Dover, 1973. — 350 p.

[2] Кант И. *Критика чистого разума.* – М.; Мысль, 1994. -– 591 с.

Инфинитезимальные голоморфно-проективные преобразования келеровых многообразий, сохраняющие тензор Эйнштейна

Е. Е. Чепурная

(ОНЭУ, Одесса, Украина)

E-mail address: culeshova@ukr.net

Инфинитезимальные голоморфно-проективные определяются условием:

$$L_\xi \Gamma^h_{ij} = \frac{1}{2}(\varphi_i \delta^h_j + \varphi_j \delta^h_i - \varphi_s F^s_i F^h_j - \varphi_s F^s_j F^h_i) \tag{1}$$

Здесь F^j_i –комплексная структура, такой аффинор, что:

$$F^j_s F^s_i = -\delta^j_i, \qquad F^j_{i,k} = 0,$$

а символ L_ξ означает производную Ли вдоль поля ξ. Вследствие 1 уравнения инфинитезимальных голоморфно-проективных преобразований имеют вид [1],[3] :

$$\begin{cases} \xi_{i,j} = \xi_{ij}; \\ \varphi_{,i} = \varphi_i; \\ \xi_{i,jk} = \xi_\alpha R^\alpha_{kji} + \frac{1}{2}(\varphi_k g_{ij} + \varphi_j g_{ik} - \varphi_s F^s_k F_{ij} - \varphi_s F^s_j F_{ik}) \\ \varphi_{i,j} = \frac{2}{n+2}\left(\xi^\alpha R_{ij,\alpha} + \xi_{\alpha,i} R^\alpha_j + \xi_{\alpha,j} R^\alpha_i\right) \end{cases} \tag{2}$$

Тензор

$$E_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} R_{ij} - \frac{1}{n} R g_{ij} \tag{3}$$

называют тензором Эйнштейна. Из требования сохранения тензора 3 вытекает, что помимо системы 2 должно выполняться уравнение

$$L_\xi E_{ij} = \xi^\alpha E_{ij,\alpha} + \xi_{\alpha,i} E^\alpha_j + \xi_{\alpha,j} E^\alpha_i = 0 \tag{4}$$

Нами доказана следующая теорема:

Теорема.*Для того, чтобы инфинитезимальные голоморфно-проективные преобразования оставляли инвариантным тензор Эйнштейна $E_{ij} = R_{ij} - \frac{1}{n} R g_{ij}$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие:*

$$L_\xi Y^h_{ijk} = 0.$$

Тензор

$$Y^h_{ijk} \stackrel{\text{def}}{=} R^h_{ijk} - \frac{R}{n(n-1)}\,(\delta^h_k g_{ij} - \delta^h_j g_{ik} + F^h_k F^\alpha_i g_{\alpha j} - F^h_j F^\alpha_i g_{\alpha k} + 2\,F^h_i F^\alpha_j g_{\alpha k}),$$

называется тензором H-конциркулярной кривизны.

Список литературы

[1] K. Yano *Differential geometry on complex and almost complex spaces*,- Pure and Applied Math. vol. 49, Pergamon Press Book, New York (1965).

[2] Й. Микеш *Голоморфно-проективные отображения и их обобщения.*,- Геометрия – 3, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз., 30, ВИНИТИ, М., 2002, 258–289

[3] S. Tachibana S. Ishihara *On infinitesimal holomorphically projective transformations in kahlerian manifolds*,- Tohoku Math. J. (2) 12 (1960), no. 1, 77–101.

Инварианты конформных отбражений локально конформно-келеровых многообразий

Е. В. Черевко

(ОНЭУ, Одесса, Украина)

E-mail address: cherevko@usa.com

Рассмотрены локально конформно-келеровы многообразия $\{M_n, J, g\}$ и $\{\overline{M}_n, J, \overline{g}\}$ которые находятся в конформном соответствии, т. е. их метрики связаны соотношением:

$$\overline{g}_{ij}(x) = e^{2\varphi(x)} g_{ij}(x),$$

где $\varphi(x)$ – некоторый инвариант.

Доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. *Если ЛКК-многообразия* $\{M_n, J, g\}$ *и* $\{\overline{M}_n, J, \overline{g}\}$ *находятся в конформном соответствии так, что* $\overline{g}_{ij}(x) = e^{2\varphi(x)} g_{ij}(x)$, *то их формы Ли связаны следующим образом:*

$$\overline{\omega} - \omega = 2d\varphi.$$

Теорема 2. *Если ЛКК-многообразия* $\{M_n, J, g\}$ *и* $\{\overline{M}_n, J, \overline{g}\}$ *находятся в конформном соответствии так, что* $\overline{g}_{ij}(x) = e^{2\varphi(x)} g_{ij}(x)$, *то тензоры:*

$$P_{ij} = L_{ij} - \frac{1}{2}\omega_{i,j} - \frac{1}{4}\omega_i\omega_j + \frac{1}{8}||\omega||^2 g_{ij};$$

$$\begin{aligned} Q^h_{ijk} = R^h_{ijk} + \delta^h_j\big(\frac{1}{2}\omega_{i,k} + \frac{1}{4}\omega_i\omega_k - \frac{1}{4}||\omega||^2 g_{ik}\big) - \\ -\delta^h_k\big(\frac{1}{2}\omega_{i,j} + \frac{1}{4}\omega_i\omega_j - \frac{1}{4}||\omega||^2 g_{ij}\big) + \\ +\big(\frac{1}{2}\omega^h{}_{,j} + \frac{1}{4}\omega^h\omega_j\big)g_{ik} - \big(\frac{1}{2}\omega^h{}_{,k} + \frac{1}{4}\omega^h\omega_k\big)g_{ij}; \end{aligned}$$

будут инвариантными. Кроме того, существует инвариантный объект, не являющийся тензором:

$$\hat{\Gamma}^k_{ij} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \Gamma^k_{ij} - \frac{1}{2}\delta^k_i\omega_j - \frac{1}{2}\delta^k_j\omega_i + \frac{1}{2}\omega^k g_{ij}.$$

Он представляет собой объект римановой связности некоторого келерова многообразия $\{\mathcal{K}_n, J, \hat{g}\}$, *конформного обоим ЛКК-многообразиям – как* $\{M_n, J, g\}$ *так и* $\{\overline{M}_n, J, \overline{g}\}$.

Здесь L_{ij} – тензор Бринкмана:

$$L_{ij} = \frac{1}{n-2}\big(R_{ij} - \frac{1}{2(n-1)}Rg_{ij}\big).$$

Список литературы

[1] *Кириченко В. Ф.*Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях / *В. Ф. Кириченко* –М.: МПГУ, 2003, 495 с.

[2] *Mikeš J., Vanžurovà A., Hinterleitner I.*Geodesic mappings and some generalizations. /*J. Mikeš* –Olomouc: Palacky University Press, 2009, 304p.

[3] *Dragomir S., Ornea L.* Locally conformal Kähler geometry /*S. Dragomir* –Boston ; Basel ; Berlin: Birkhäuser – 1998, 328p.

Конформная модель единичного вполне геодезического векторного поля

А. Л. Ямпольский

(ХНУ им. В. Каразина, Харьков, Украина)

E-mail address: a.yampolsky@karazin.ua

Рассматриваются подмногообразия единичного касательного расслоения с метрикой Сасаки, порожденные единичным векторным полем на базовом римановом многообразии (M^n, g). С данным гладким единичным векторным полем $\xi \in \mathfrak{X}(M^n)$ связывается оператор Номидзу $A_\xi : X \to -\nabla_X \xi$, где X – произвольное гладкое векторное поле на M^n. В работе [1] были введены понятия *грубого гессиана* поля и *тензора гармоничности*, имеющих вид

$$Hess_\xi(X,Y) = \tfrac{1}{2}\big((\nabla_X A_\xi)Y + (\nabla_Y A_\xi)X\big),$$
$$\Gamma_\xi(X,Y) = \tfrac{1}{2}\big(R(A_\xi X, \xi)Y + R(A_\xi Y, \xi)X\big),$$

где R – тензор кривизны (M^n, g). В выражении через эти тензоры, условия вполне геодезичности для $\xi(M^n) \subset T_1 M^n$ принимает следующий вид.

Лемма 1. *Единичное векторное поле ξ на римановом многообразии M^n порождает вполне геодезическое подмногообразие $\xi(M^n) \subset T_1 M^n$ тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет системе уравнений*

$$Hess_\xi(X,Y) - A_\xi \Gamma_\xi(X,Y) - \langle A_\xi X, A_\xi Y \rangle \xi = 0$$

для любых векторных полей $X, Y \in \mathfrak{X}(M^n)$.

В работе [2] было получено полное описание двумерных многообразий, допускающих единичное векторное поле с вполне геодезическим образом. Для плоскости E^2 нетрудно найти интегральные траектории вполне геодезического векторного поля. Для этого следует принять одну из семейства параллельных геодезических в качестве оси Oy, а одну из семейства ортогональных траекторий (так же состоящего из геодезических) в качестве оси Ox. В таком случае [2] вполне геодезическое поле имеет вид $\xi = \{\cos(ax), \sin(ax)\}$, а значит для интегральных траекторий получим дифференциальное уравнение $\frac{dy}{dx} = \tan(ax)$ решением которого будет семейство линий $y(x) = -\frac{1}{a}\ln|\cos(ax)| + C$.

Интегральные траектории вполне геодезического единичного векторного поля на единичной сфере конформно эквивалентны семейству параллельных прямых на плоскости [2]. Здесь мы доказываем следующую теорему.

Теорема 1. *Интегральные траектории вполне геодезического единичного векторного поля на двумерном многообразии конформно эквивалентны интегральным траекториям единичного вполне геодезического векторного поля на цилиндре как фактор-пространстве плоскости.*

Список литературы

[1] Yampolsky A. On special types of minimal and totally geodesic unit vector fields: Proceedings of the Seventh International Conference in Geometry, Integrability and Quantization June 2 – 10, 2005, Varna, Bulgaria/I. Mladenov edt., -P. 292 – 306.

[2] Yampolsky A. Full description of totally geodesic unit vector field on Riemannian 2-manifold// Journal of Mathematical Physics, Analysys, Geometry. -2004. -V.1, №3. -P. 355 – 365.

ЗМІСТ