International
Scientific Conference

Algebraic and Geometric Methods of Analysis

26-30 may 2020
Odesa, Ukraine

List of topics

- Algebraic methods in geometry
- Differential geometry in the large
- Geometry and topology of differentiable manifolds
- General and algebraic topology
- Dynamical systems and their applications
- Geometric problems in mathematical analysis
- Geometric and topological methods in natural sciences

Organizers

- Ministry of Education and Science of Ukraine
- Odesa National Academy of Food Technologies
- Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine
- Odessa I. I. Mechnikov National University
- Taras Shevchenko National University of Kyiv
- International Geometry Center
- Kyiv Mathematical Society

Program Committee

Chairman: Prishlyak A.
(*Kyiv, Ukraine*)
Balan V.
(*Bucharest, Romania*)
Banakh T.
(*Lviv, Ukraine*)
Bolotov D.
(*Kharkiv, Ukraine*)
Borysenko O.
(*Kharkiv, Ukraine*)
Cherevko Ye.
(*Odesa, Ukraine*)
Fedchenko Yu.
(*Odesa, Ukraine*)
Karlova O.
(*Chernivtsi, Ukraine*)
Kiosak V.
(*Odessa, Ukraine*)
Kirillov V.
(*Odesa, Ukraine*)
Konovenko N.
(*Odesa, Ukraine*)
Lyubashenko V.
(*Kyiv, Ukraine*)
Maksymenko S.
(*Kyiv, Ukraine*)
Matsumoto K.
(*Yamagata, Japan*)
Mormul P.
(*Warsaw, Poland*)
Mykhailyuik V.
(*Chernivtsi, Ukraine*)
Plachta L.
(*Krakov, Poland*)
Pokas S.
(*Odesa, Ukraine*)
Polulyakh E.
(*Kyiv, Ukraine*)
Sabitov I.
(*Moscow, Russia*)
Savchenko A.
(*Kherson, Ukraine*)
Sergeeva A.
(*Odesa, Ukraine*)
Shelekhov A.
(*Tver, Russia*)
Volkov V.
(*Odesa, Ukraine*)
Zarichnyi M.
(*Lviv, Ukraine*)

Administrative committee

- Egorov B., chairman, rector of the ONAFT;
- Povarova N., deputy chairman, Pro-rector for scientific work of the ONAFT;
- Mardar M., Pro-rector for scientific-pedagogical work and international communications of the ONAFT;
- Fedosov S., Director of the International Cooperation Center of the ONAFT;
- Kotlik S., Director of the P.M. Platonov Educational-scientific institute of computer systems and technologies “Industry 4.0”;
- Svytyy I., Dean of the Faculty of Computer Systems and Automation.

Organizing commitee

Kirillov V.
Konovenko N.
Fedchenko Yu.
Maksymenko S.
Cherevko Ye.
Osadchuk E.
Prus A.

Об инвариантных решений двумерного уравнения теплопроводности

Нарманов Отабек Абдигаппарович
(Ташкентский университет информационных технологий, Ташкент, 100174, Узбекистан)
E-mail: otabek.narmanov@mail.ru

Пусть нам дано дифференциальное уравнение порядка

$$\Delta(x, u^{(m)}) = 0 \tag{1}$$

от n независимых $x = (x^1, x^2, ..., x^n)$ и q зависимых переменных $u = (u^1, u^2, ..., u^q)$, содержащее производные от u по x до порядка m.

Определение-1 Группа G преобразований, действующая на множестве M пространства независимых и зависимых переменных дифференциального уравнения называется группой симметрий уравнения (0.1) , если для каждого решения $u = f(x)$ уравнения (0.1) и для $g \in G$ такого, что определено $g \circ f$, то функция $\tilde{u} = g \circ f$, также является решением уравнения.

Нахождению групп симметрий дифференциальных уравнений и их применениям для исследований посвящены многочисленные исследования [1],[3],[2]. В работе [1] найдена алгебра Ли инфинитезимальных образующих группы симметрий для двумерного и трехмерного уравнения теплопроводности. Некоторые инвариантные решения двумерного уравнения теплопроводности найдены в работе [2].

Рассмотрим двумерное уравнение теплопроводности

$$u_t = \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i}(k_i(u)\frac{\partial u}{\partial x_i}) + Q(u) \tag{2}$$

где $u = u(x_1, x_2, t) \geq 0$ — температурная функция, $k_i(u) \geq 0$, $Q(u)$ — функции от температуры u. Функция $Q(u)$ описывает процесс тепловыделения, если $Q(u) > 0$ и процесс теплопоглощения, если $Q(u) < 0$.

Рассмотрим случай когда коэффициенты теплопроводности $k_1(u), k_2(u)$ в уравнении (1) являются экспоненциальными функциями температуры т.е. они имеют вид $k_1(u) = k_2(u) = exp(u)$.

Предположим, что $Q(u) = -exp(\alpha u)$, где $\alpha-$ действительное число. В этом случае уравнение (1) имеет следующий вид:

$$u_t = exp(u)\Delta u + exp(u)(\nabla u)^2 - exp(\alpha u) \tag{3}$$

где $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}$ — оператор Лапласа,$\nabla u = \{\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}\}$ —градиент функции u.

Предположим, что $\alpha \neq 0$. В работе [1] показано, что следующее векторное поле является инфинитезимальней образующей группы симметрии уравнения (2):

$$X = 2\alpha t\frac{\partial}{\partial t} - (\alpha - 1)\frac{\partial}{\partial x_1} - (\alpha - 1)\frac{\partial}{\partial x_2} - 2\frac{\partial}{\partial u}.$$

Это означает, что поток этого векторного поля X порождает группу преобразований пространства переменных (t, x_1, x_2, u), элементы которого переводит решения уравнения (4) в его решения. Поток векторного поля X порождают следующую группу преобразований

$$(t, x_i, u) \to (te^{2\alpha s}, x_i e^{(\alpha-1)s}, u - 2s), s \in R \tag{4}$$

Мы найдем решения уравнения (2), инвариантные относительно групп преобразований (4). Для этого сначала находим инвариантные функции этих преобразований.

Известно, что [3] гладкая функция $f : M \to R$ является инвариантной функцией группы преобразований G, действующей на многообразии M тогда и только тогда, когда $Xf = 0$ для каждой инфинитезимальной образующей X группы G.

Используя этот критерий мы находим, что функции

$$I = e^{\frac{u}{2}} t^{\frac{1}{2\alpha}}, \xi = \frac{x_1 - x_2}{t^{\beta}},$$

где $\beta = \frac{\alpha - 1}{2\alpha}$, являются инвариантными фунциями группы преобразований (3), что вытекает из следущих равенств $X_1(I) = 0$, $X_1(\xi) = 0$. Решение уравнения (3) ищем в виде

$$u = \ln \frac{V(\xi)}{t^{\frac{1}{\alpha}}} \qquad (5)$$

Подставляя функцию (5) в уравнение (3) получим следующее обыкновенное дифференциальное уравнение относительно функции V :

$$2V'' + \beta\xi \frac{V'}{V} - V^{\alpha} + \frac{1}{\alpha} = 0 \qquad (6)$$

В случае, когда $\alpha = 1$ уравнение (6) имеет слудющий вид

$$2\frac{d^2V}{d\xi^2} - V + 1 = 0. \qquad (7)$$

Делая замену $p(V) = \frac{dV}{d\xi}$ получим линейно уравнение первого порядка

$$2p\frac{dp}{dV} + V + 1 = 0.$$

Решая это уравнение находим, что

$$p = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{V^2 - 2V + C_1}.$$

Теперь из уравнения

$$\frac{dV}{d\xi} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{V^2 - 2V + C_1}$$

находим, что

$$V - 1 + \sqrt{V^2 - 2V + C_1} = C_2 e^{\frac{\xi}{\sqrt{2}}},$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные. Если $C_1 = 1$, то функцию можно написать в явной форме: $V = C_2 e^{\frac{\xi}{\sqrt{2}}} + 1$. Таким образом в общем случае, когда $\alpha \neq 0$, мы имеем следующую теорему

Теорема 1. *Инвариантные решения уравнения (3) относительно группы преобразований (4) имеют следующий вид*

$$u = \ln \frac{V(\xi)}{t^{\frac{1}{\alpha}}} \qquad (8)$$

где $V(\xi)$– общее решение уравнения (6).

В случае $\alpha = 1$ поскольку в уравнении есть источник поглощения тепла, из вида решения (8) вытекает, что при $0 < t \leq 1$ температура в каждой точки плоскости увеличивается. Начиная с $t \geq 1$ температура уменшается и стремится к $u = \ln V(\xi)$ при $t \to \infty$.

Литература

[1] Dorodnitsyn V.A.,Knyazeva I.V.,Svirshchevskii S. R. Group properties of the heat equation with source in the two-dimensional and three-dimensional cases,Differential equations,1983,vol. 19,issue 7, 1215-1223.
[2] Narmanov O.A. Invariant solutions of the two-dimensional heat equation.Bulletin of Udmurt University. Mathematics, Mechanics, Computer Science, 2019, vol. 29, issue 1, pp. 52-60
[3] Olver P. Applications of Lie Groups to Differential Equations. Springer 1986, P. 513 p. Translated under the title *Prilojeyniya grupp Li k diiferentsialnim uravneniyam*, Moscow: Mir, 1989, 639 p.