Міністерство освіти і науки України

ОДЕСЬКА ДЕРЖАВНА АКАДЕМІЯ ХОЛОДУ

Угольніков О.П., Жихарєва Н.В.

МАТЕМАТИЧНА ФІЗИКА

Навчальний посібник

Одеса 2010

Угольніков О.П., Жихарєва Н.В. Математична фізика: навчальний посібник. Одеська державна академія холоду, 2010. – 136 с.

Процеси переносу маси і енергії є головними предметами дослідження у теплофізиці. Такі процеси, як дифузія, рух рідин та газів, тепломасоперенiс, тепломасообмін на поверхні розділу двох фаз протікають у теплообмінних апаратах, що застосовуються в різних галузях енергетики, холодильній і кріогенній техніці, металургії, хімічній і харчовой промисловості. Для конструювання і оптимізації цих апаратів необхідно вміти контролювати вказані процеси.

Процеси обміну масою і енергією описуються диференціальними рівняннями другого порядку у частинних похідних. У навчальному посібнику розглядаються основні методи розв'язання різних типів диференціальних рівнянь другого порядку у частинних похідних, як аналітичні, так і чисельні, головним чином, на прикладі розв'язання рівняння теплопровідності.

Навчальний посібник призначено для студентів спеціальності 090511 "Теплофізика".

Рецензент: Швець В.Т., докт. фіз-мат. наук, професор Одеської державної академії холоду.

В.Т.Швець

М.Д.Потапов

Зміст

1. Вступ

Розвиток будь-якого процесу, будь-якого фізичного явища є результат компромісу між силою, що обумовлює саму можливість протікання процесу (явища), і силою опору, що перешкоджає зміні стану тіла або системи. Так, наприклад, рушійною силою руху газів є градієнт тиску в його об'ємі і початковий запас кінетичної енергії в газі, а силою опору – сили внутрішнього тертя газу і сили опору твердих поверхонь, що розташовані в об'ємі газу, або його обмежують. Оскільки на подолання сил опору витрачається енергія середовища, то ці сили називаються *дисипативним механізмом* (дисипація – розсіювання). Очевидно, що процес, що має дисипативний механізм, є процесом *затухаючим*. В протилежність цьому рушійну силу називають *дисперсійним механізмом. Дисперсійні процеси не затухають в просторі і в часі.*

Для математичного опису сукупної дії цих механізмів використовуються диференціальні рівняння у частинних похідних, і фізичний зміст цих рівнянь є їх першою важливою характеристикою. Другою важливою характеристикою диференціального рівняння є його лінійність або нелінійність. В більшості випадків диференціальні рівняння, що мають відношення до теплофізичних процесів, є нелінійними. Строге аналітичне розв'язання допускають тільки лінійні диференціальні рівняння у частинних похідних, оскільки теорії нелінійних рівнянь досі не існує (є лише якісна теорія нелінійних рівнянь). Нелінійні диференціальні рівняння у частинних похідних розв'язуються *наближеними* аналітичними або чисельними методами, проте і в цьому випадку вихідними для розв'язання є *лінеаризовані* рівняння у частинних похідних, тому вивчення властивостей лінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних є дуже важливим.

1.1. Класифікація диференціальних рівнянь другого порядку

Рівняння, що зв'язує невідому функцію, незалежні змінні x, y, z, t і частинні похідні від невідомої функції, називається *диференціальним рівнянням у частинних похідних.* Найбільш загальне рівняння в частинних похідних другого порядку з двома незалежними змінними x, y може бути записано у вигляді

$$F(x, y, u'_x, u'_y, u''_{xx}, u''_{xy}, u''_{yy}) = 0 .$$

Диференціальне рівняння у частинних похідних називається *квазілінійним*, якщо воно лінійне відносно всіх старших похідних від невідомої функції. Так, наприклад, рівняння

$$Au''_{xx} + Bu''_{xy} + C u''_{yy} + F(x, y, u, u'_x, u'_y) = 0$$

є квазілінійним рівнянням другого порядку. Рівняння у частинних похідних називається *лінійним*, якщо воно лінійне відносно невідомої функції і її частинних похідних. Так, наприклад, рівняння

$$Au''_{xx} + Bu''_{xy} + C u''_{yy} + Du'_x + E u'_y + F u = 0$$

є лінійним рівнянням другого порядку відносно невідомої функції $u(x, y)$. Тут $u(x, y)$ – будь-який параметр стану тіла або системи (температура T, швидкість руху v і так далі), x – просторова координата, а під y розуміється або друга просторова координата, або час t. У загальному випадку коефіцієнти A, B, C, D, E, F є функціями змінних x, y. При сталих коефіцієнтах це рівняння називається *лінійним диференціальним рівнянням у частинних похідних із сталими коефіцієнтами.*

Розв'язком рівняння в частинних похідних називається будь-яка функція, підстановка якої в рівняння замість невідомої функції і її частинних похідних обертає це рівняння в тотожність по незалежних змінних.

Залежно від величин коефіцієнтів при старших похідних диференціального рівняння у частинних похідних другого порядку підрозділяються на три типи, що розрізняються по фізичному змісту і математичним властивостям:

- гіперболічне $B^2 - 4AC > 0$,
- параболічне $B^2 - 4AC = 0$,
- еліптичне $B^2 - 4AC < 0$.

Канонічна форма рівнянь відповідного типу має вигляд:

- гіперболічне $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \tag{1.1}$$
- параболічне $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{a}\frac{\partial u}{\partial y}, \tag{1.2}$$
- еліптичне $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2\pi\rho . \tag{1.3}$$

Рівняння (1.1) описує коливальні і хвильові процеси. Воно є основним диференціальним рівнянням акустики, оптики і електродинаміки змінних полів. Рівняння (1.2) описує процеси вирівнювання: теплопровідність (вирівнювання температури), дифузію (вирівнювання щільності або концентрації речовини), внутрішнє тертя (вирівнювання імпульсів) і так далі Рівняння (1.3) описує рівноважні стани (потенціал поля тяжіння або потенціали електричних і магнітних полів з джерелами щільністю ρ). Це рівняння називається рівнянням Пуассона.

Конкретний фізичний процес в цілому визначається не тільки диференціальним рівнянням у частинних похідних типу (1.1)–(1.3), але і *крайовими умовами*, які є сукупністю *початкових* і *граничних* умов. Якщо не робити відмінності між часом t і просторовою координатою y як незалежними змінними, то крайові умови, що задаються на контурі, за допомогою диференціального рівняння «екстраполюються» на досліджувану область, визначаючи тим самим закономірності зміни шуканій функції u в конкретному процесі.

Крайові умови бувають трьох типів:

1) умова Діріхле (межові умови I роду або початкові умови), наприклад

$$u = f \text{ на } \Gamma \text{ або } u(x,0) = f_0 \text{ для початкових умов} \tag{1.4}$$

де $f(x, y)$ і $f_0(x)$ – деякі задані функції або сталі;

2) умова Неймана (межові умови II роду), наприклад

$$\frac{\partial u}{\partial n} = f \text{ на } \Gamma; \tag{1.5}$$

3) змішана умова або умова Робіна (межова умова III роду), наприклад

$$\frac{\partial u}{\partial n} + ku = g,\ k > 0 \text{ на } \Gamma. \tag{1.6}$$

В умовах (1.5) і (1.6) символ $\partial / \partial n$ означає похідну по зовнішній по відношенню до області Ω нормалі; $g(x, y)$ – задана функція або число.

Сукупність диференціального рівняння у частинних похідних і крайових умов визначає *крайову задачу* відповідно гіперболічного, параболічного і еліптичного типу.

1.2. Класифікація методів розв'язання крайових задач

Існуючі методи розв'язання крайових завдань можна класифікувати по різних ознаках; одна з них – за формою представлення результату. Якщо розв'язання може бути представлене у вигляді формули або, в крайньому випадку, у вигляді інтеграла, то говорять про *аналітичні методи.* Розв'язання початкової задачі може бути отримане в методах даної групи з будь-якою наперед заданою точністю у вигляді неперервної функції координат і часу. Ці методи розглядаються в першій частині курсу.

Важливою характеристикою аналітичних методів є можливість розв'язання нелінійних крайових задач. Метод, розроблений для розв'язання нелінійних задач, може бути застосований і до лінійних

задач; обернене, як правило, неможливо. Для розв'язання лінійних крайових задач використовуються:

1. *Класичні методи:* 1) метод розділення змінних (метод Фур'є); 2) метод функцій джерел (функцій Гріна); 3) метод теплових потенціалів (цей метод може застосовуватися для розв'язання крайових задач з нелінійними межовими умовами).

2. *Методи інтегральних перетворень*: 1) у нескінченних межах; 2) у скінчених межах.

Головним недоліком точних методів є можливість розв'язання тільки лінійних задач. У деяких окремих випадках в рамках точних методів можна розв'язувати задачі з нелінійними межовими умовами. В протилежність цьому за допомогою *чисельних методів* можна розв'язувати будь-яку задачу (лінійну в умовах складної геометрії і нелінійну). Розв'язок при цьому представляється числовими значеннями шуканої функції при деяких заданих чисельних значеннях аргументів.

Чисельних методів існує досить багато, і всі вони засновані на апроксимації невідомої функції на деякому обмеженому об'ємі досліджуваної області якою-небудь аналітичною (лінійною, квадратичною і тому подібне) залежністю. В даний час найбільш поширеними чисельними методами є:

3. *Метод скінчених елементів*, який застосовується для розв'язання задач механіки конструкцій.

4. *Метод скінчених різниць*, що є універсальним методом для розв'язання задач теплофізики, гідрогазодинаміки і так далі.

5. *Метод межових елементів*, який використовується при розв'язанні задач, в яких рушійною силою протікання процесу є деякий потенціал.

Недоліком чисельних методів є представлення результатів розв'язання задачі у формі багатовимірних таблиць числових даних, які важко аналізувати і узагальнювати. Зокрема, використання табличних даних ускладнює оптимізацію процесів.

Проміжне положення між двома вказаними методами займають *наближені аналітичні методи.* По суті, це також своєрідні чисельні методи, проте апроксимація невідомої функції задається відразу на всій досліджуваній області Ω. Оскільки при такій апроксимації використовується, як правило, невелике число доданків ряду, то виявляється можливим отримати розв'язання у вигляді деякої формули, що дозволяє обчислити значення невідомої функції для заданих значень параметрів.